# ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι 28-1-10

*Διδάσκων: Α. Αρβανιτογεώργος*

## ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ 5 ΑΠΟ ΤΑ 7 ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΘΕΜΑΤΑ

**1.** (α) Θεωρούμε τις διαφορικές δομές $\phi(x) = x$, $\psi(x) = x^3$ του $\mathbf{R}$, όπου $x \in \mathbf{R}$. Αποδείξτε ότι οι διαφορικές αυτές δομές είναι διαφορετικές μεταξύ τους, αλλά οι πολλαπλότητες $(\mathbf{R}, \phi), (\mathbf{R}, \psi)$ είναι αμφιδιαφορικές.
(β) Είναι η απεικόνιση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f(x) = x^2$ ένας χάρτης της πολλαπλότητας $M = \mathbf{R}$; Εξηγήστε.

**2.** (α) Έστω $f : M \to \mathbf{R}^m$ και $f_i = u_i \circ f$ οι συνιστώσες συναρτήσεις της $f$ $(u_i : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}\ u_i(x^1, \dots, x^m) = x^i)$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι λεία στο $x$ εάν και μόνο εάν οι $f_i$ είναι λείες στο $x$, για κάθε $i = 1, \dots, m$.
(β) Έστω $f : M \to N$. Αποδείξτε ότι η $f$ είναι λεία εάν και μόνο εάν για κάθε $g \in \mathcal{F}(N)$ η σύνθεση $g \circ f$ είναι λεία στην $M$.

**3.** (α) Δώστε τον ορισμό της ομάδας Lie.
(β) Έστω $M_n\mathbf{C}$ το σύνολο όλων των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathrm{Gl}_n\mathbf{C} = \{A \in M_n\mathbf{C} : \det(A) \neq 0\}$ είναι μια ομάδα Lie.
(γ) Θεωρούμε τη μοναδιαία ομάδα $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{Gl}_n\mathbf{C} : \bar{A}^t A = I\}$ και έστω $\mathrm{Herm}_n\mathbf{C} = \{A \in M_n\mathbf{C} : A = \bar{A}^t\}$ το σύνολο όλων των ερμητιανών πινάκων. Υπολογίστε το διαφορικό $df_A$ της απεικόνισης $f : \mathrm{Gl}_n\mathbf{C} \to \mathrm{Herm}_n\mathbf{C}$, $f(A) = \bar{A}^t A$ σε ένα σημείο $A \in \mathrm{Gl}_n\mathbf{C}$ και αποδείξτε ότι αυτό είναι επί όταν περιοριστεί στην $\mathrm{U}(n)$. Συμπεράνετε στη συνέχεια ότι η $\mathrm{U}(n)$ είναι λεία πολλαπλότητα διάστασης $n^2$ και ομάδα Lie.
(δ) Έστω $\mathrm{Skew}_n\mathbf{C} = \{A \in M_n\mathbf{C} : \bar{A}^t = -A\}$ το σύνολο όλων των αντιερμητιανών πινάκων. Αποδείξτε ότι $\dim \mathrm{Skew}_n\mathbf{C} = n^2$ και στη συνέχεια ότι $T_I U(n) = \mathrm{Skew}_n\mathbf{C}$.

**4. i)** Θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία $X = y\frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}$ του $\mathbf{R}^2$.
(α) Υπολογίστε το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$.
(β) Βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες των διανυσματικών πεδίων $X, Y$ που διέρχονται από το σημείο $(1, 1)$ και εξετάστε αν αυτές ορίζονται σε όλο το $\mathbf{R}$ (δηλ. αν τα πεδία είναι πλήρη).
**(ii)** Κατασκευάστε ένα λείο διανυσματικό πεδίο στην σφαίρα $S^3$ το οποίο να μην μηδενίζεται πουθενά.

**5.** (α) Αν $\omega$ είναι μια 1-μορφή και $X$ ένα διανυσματικό πεδίο σε μια πολλαπλότητα $M$, να ορίσετε τη συνάρτηση $\omega(X)$.
(β) Αποδείξτε ότι μια 1-μορφή $\omega$ σε μια πολλαπλότητα $M$ είναι λεία εάν και μόνο εάν για κάθε λείο διανυσματικό πεδίο $X$ στην $M$ η συνάρτηση $\omega(X)$ είναι λεία στην $M$.

**6.** (α) Έστω $\sigma^1, \ldots, \sigma^k$ $k$ το πλήθος 1-μορφές σε έναν διανυσματικό χώρο $V$. Αποδείξτε ότι οι $\sigma^1, \ldots, \sigma^k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες εάν και μόνο εάν $\sigma^1 \wedge \cdots \wedge \sigma^k \neq 0$.
(β) Αληθεύει ότι για κάθε διαφορική 1-μορφή ισχύει ότι $\omega \wedge d\omega = 0$;

**7.** (α) Δώστε τον ορισμό του αριστερά αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου σε μια ομάδα Lie.
(β) Βρείτε όλα τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία της ομάδας Lie $\mathrm{Gl}_n\mathbf{R}$

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**