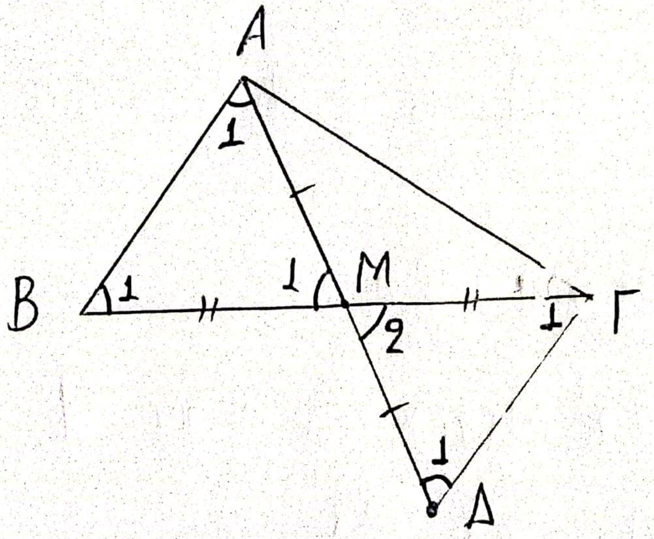
Ευκλείδεια Γεωμετρία και η Διδασκαλία της

25/6/2024

Λύσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ 1ο

(i)



Τα τρίγωνα AMB και ΔMΓ είναι ίσα διότι:

(i) $|AM| = |M\Delta|$ (Π) (υπόθεση)

(ii) $|BM| = |M\Gamma|$ (Π) (M: μέσο της ΑΓ)

(iii) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (Γ) (κατακορυφήν)

↑ περιεχόμενες των (i), (ii) αντίστοιχα.

Υπόλοιπα στοιχεία που προκύπτουν από την ισότητα: $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1$, $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, $|AB| = |\Gamma\Delta|$

· Τριγωνική ανισότητα στο $A\Gamma\Delta$.

$$|A\Delta| < |A\Gamma| + |\Gamma\Delta| \Rightarrow 2|AM| < |A\Gamma| + |AB|$$

$$\Rightarrow \boxed{|AM| < \frac{|AB| + |A\Gamma|}{2}}$$

(ii) eclass - Μαθήματα 5 και 6
Πρόταση σελ. 6 [Αντίστροφα, αν...]

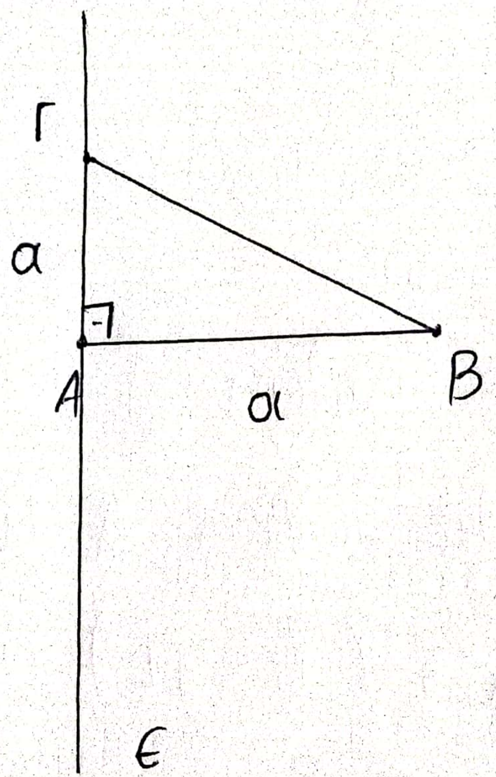
ΘΕΜΑ 2ο

(i) eclass - Μαθήματα 3 και 4
ΘΕΩΡΗΜΑ σελ. 29

(ii) eclass - Μαθήματα 7 και 8
πχ7 - σελ. 24

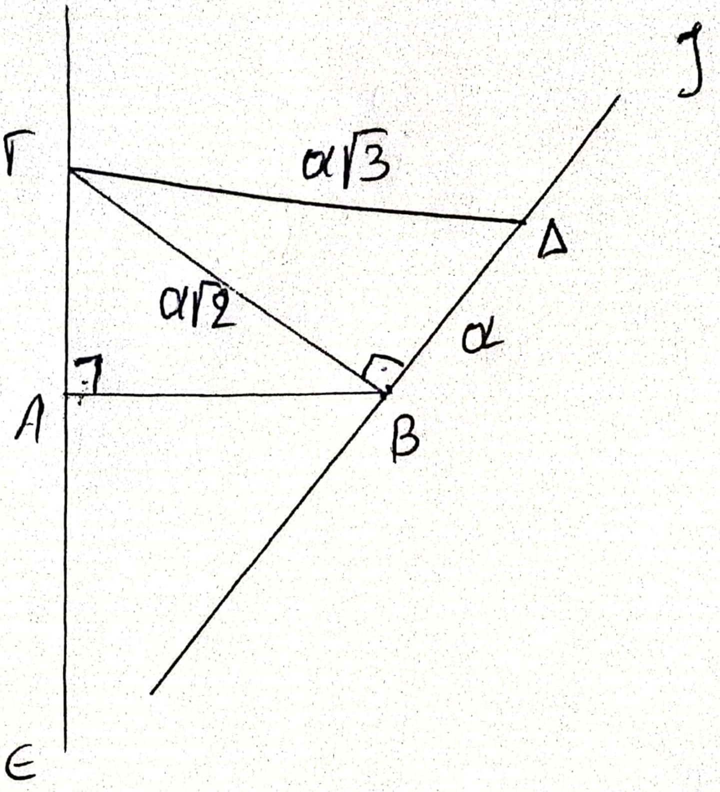
ΘΕΜΑ 3º

(i) Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με $|AB| = \alpha$. Στο άκρο Α φέρουμε κάθετη ευθεία ε. Επί της ε επιλέγουμε σημείο Γ ώστε $|A\Gamma| = \alpha$.



Τότε ΑΓΒ ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 1L$) και από ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

$|B\Gamma|^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2$, οπότε $|B\Gamma| = \alpha\sqrt{2}$.



Στο Β φέρουμε κάθετη δ και επί της Βδ επιλέγουμε σημείο Δ με $|ΒΔ| = \alpha$.

Τότε ΓΒΔ ορθογώνιο ($\hat{B} = 1L$) και από ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ:

$|ΓΔ|^2 = \alpha^2 + 2\alpha^2 = 3\alpha^2$.

Άρα $|ΓΔ| = \alpha\sqrt{3}$ το ζητούμενο.

• $2\alpha > \alpha\sqrt{3} > \alpha$.

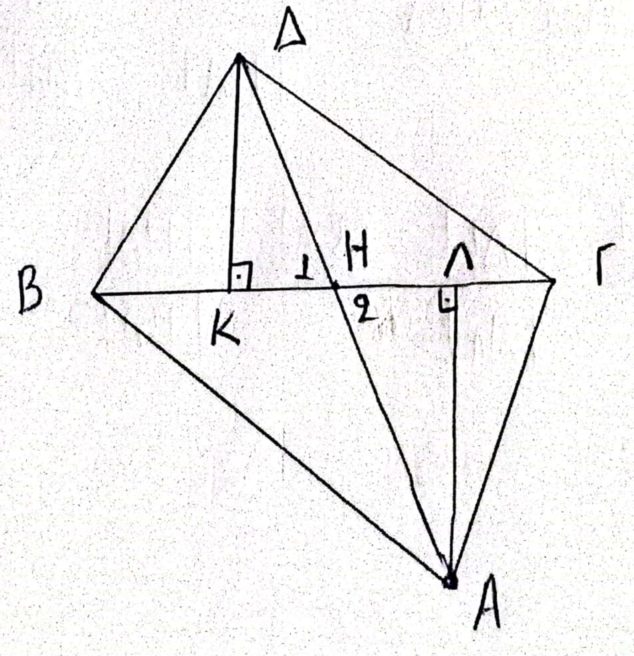
Ισχύει: $(2\alpha)^2 = (\alpha\sqrt{3})^2 + \alpha^2$ $[4\alpha^2 = 3\alpha^2 + \alpha^2]$

Από το Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 2α και κάθετες πλευρές α και $\alpha\sqrt{3}$.

Αντίστροφο ΠΘ: Μάθημα 9 - σελ. 5

(ii) eclass - Μάθημα 9 - Κατασκευή - σελ. 15

ΘΕΜΑ 4ο



Με βάση ΒΓ και στα δύο τρίγωνα έχουμε: $E(B\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}|B\Gamma||\Delta K|$

$$E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|B\Gamma||A\Lambda|$$

όπου ΔΚ και ΑΛ τα ύψη από το Δ στη ΒΓ (για το τρίγωνο ΒΓΔ) και από το Λ στη ΒΓ (για το τρίγωνο ΑΒΓ) (βλέπε Σχήμα)

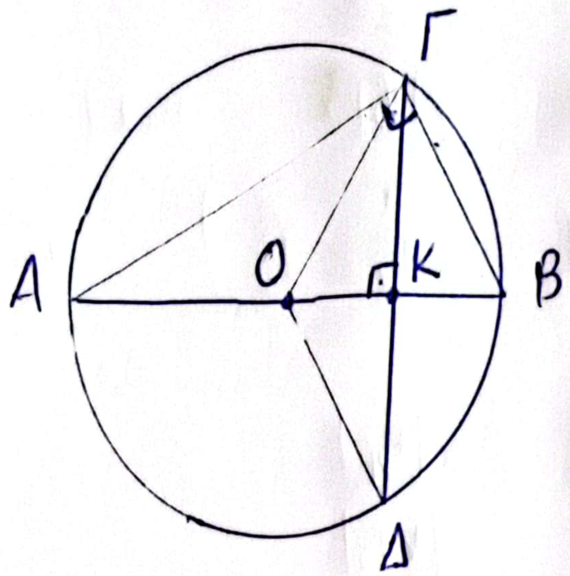
Επομένως, $\frac{E(B\Gamma\Delta)}{E(AB\Gamma)} = \frac{|\Delta K|}{|A\Lambda|}$ (*)

Τα τρίγωνα ΔΚΗ και ΗΛΑ είναι όμοια ($\hat{K} = \hat{\Lambda} = 1L$, $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ κατακορυφήν), οπότε έχουν πλευρές ανάλογες: $\frac{|H\Delta|}{|HA|} = \frac{|\Delta K|}{|A\Lambda|} = \frac{|KH|}{|H\Lambda|}$ (**)

Άρα: $\frac{E(B\Gamma\Delta)}{E(AB\Gamma)} \overset{(*)}{=} \frac{|\Delta K|}{|A\Lambda|} \overset{(**)}{=} \frac{|H\Delta|}{|HA|}$ ∎

Σαρώθηκε με το CamScanner

ΘΕΜΑ 5ο



Έστω Ο το κέντρο. Στα ορθογώνια τρίγωνα ΓΚΟ και ΔΚΟ έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} |ΓΚ|^2 &= r^2 - |ΟΚ|^2 \\ |ΚΔ|^2 &= r^2 - |ΟΚ|^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow |ΚΓ| = |ΚΔ|$$

Η γωνία $\hat{ΑΓΒ}$ ($\hat{Γ}$ για συντομία) είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο ημικύκλιο $\overset{\frown}{ΑΔΒ}$, οπότε $\hat{Γ} = 1L$.

Από γνωστή εφαρμογή στη θεωρία της ομοιότητας τριγώνων έχουμε:

$$|K\Gamma|^2 = |KA||KB|.$$

Τελικά,

$$|KA|^2+|KB|^2+|K\Gamma|^2+|K\Delta|^2 =$$

$$|KA|^2+|KB|^2+2|K\Gamma|^2 =$$

$$|KA|^2+|KB|^2+2|KA||KB| =$$

$$(|KA|+|KB|)^2 = |AB|^2 = 4r^2$$

■