

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εξέταση στην "Ευκλείδεια Γεωμετρία και η Διδασκαλία της"
25/06/2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 45 λεπτά

ΘΕΜΑ 1ο (2 μονάδες)

- (i) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM η διάμεσος από την κορυφή A . Αφού προεκτείνετε την AM κατά ίσο τμήμα $M\Delta$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMB και $\Delta M\Gamma$ είναι ίσα. Στη συνέχεια, να δείξετε ότι

$$|AM| < \frac{|AB| + |A\Gamma|}{2}.$$

(0.5+0.5)

- (ii) Αν a, b, c είναι θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $|b - c| < a < b + c$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών τα a, b και c . (1)

ΘΕΜΑ 2ο (2.5 μονάδες)

- (i) Να αποδείξετε ότι οι τρεις διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχονται από κοινό σημείο I το οποίο είναι κέντρο κύκλου $I(r)$ εφαπτομένου ταυτόχρονα και στις τρεις πλευρές του $AB\Gamma$. Πώς λέγεται ο κύκλος $I(r)$; (1.5)
- (ii) Έστω κύκλος $O(r)$ και έστω ευθύγραμμο τμήμα AB . Από κάθε σημείο Γ του κύκλου $O(r)$ φέρουμε παράλληλο, ίσο και ομόρροπο προς το AB , τμήμα $\Gamma\Delta$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Δ . (1)

ΘΕΜΑ 3ο (2.5 μονάδες)

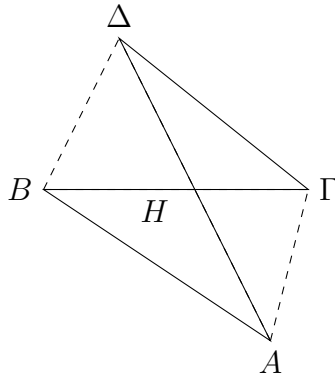
- (i) Έστω θετικός αριθμός a . Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα μήκους $a\sqrt{3}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών $a, a\sqrt{3}, 2a$. Να διατυπώσετε το θεώρημα που χρησιμοποιήσατε. (0.5 x 3)
- (ii) Δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων με μήκος x και y , αντίστοιχα, να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα μήκους z ώστε $z^2 = xy$. (1)

ΘΕΜΑ 4ο (1.5 μονάδες)

Στο ακόλουθο σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $B\Gamma\Delta$ έχουν κοινή πλευρά τη $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι

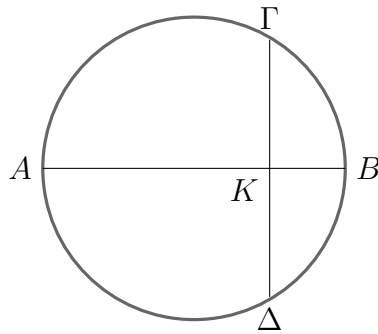
$$\frac{E(B\Gamma\Delta)}{E(AB\Gamma)} = \frac{|H\Delta|}{|HA|},$$

όπου H το σημείο τομής της ευθείας $B\Gamma$ με την $A\Delta$.



ΘΕΜΑ 5ο (1.5 μονάδες)

Έστω κύκλος $O(r)$, AB μια διάμετρος του και έστω χορδή $\Gamma\Delta$ η οποία είναι κάθετη στην AB και την τέμνει στο σημείο K , όπως στο ακόλουθο σχήμα. Να αποδείξετε ότι $|KA|^2 + |KB|^2 + |K\Gamma|^2 + |K\Delta|^2 = 4r^2$.



Καλή επιτυχία!