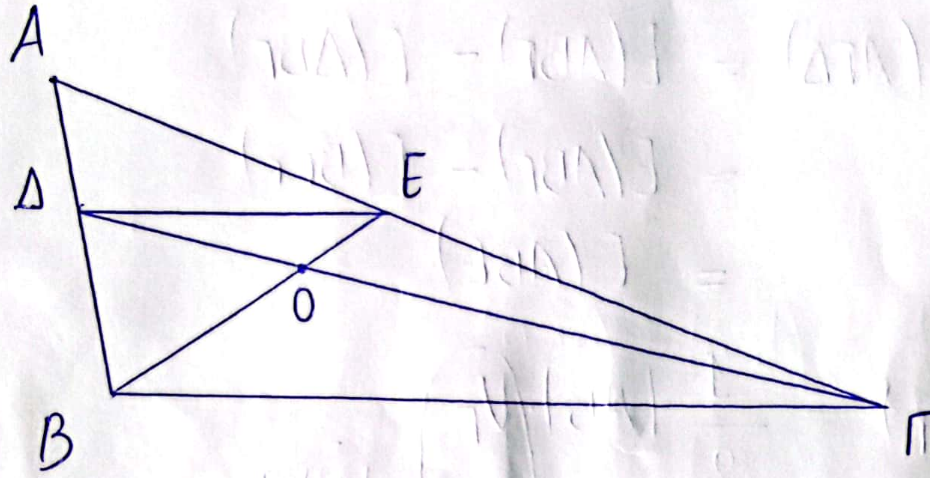
(I) Στο παρακάτω σχήμα ισχύει

$$\frac{|ΟΔ|}{|ΟΓ|} = \frac{|ΟΕ|}{|ΟΒ|} = λ.$$ Να αποδειχθεί ότι:

(i) $λ \neq 1$ ii) $E(ABE) = E(AΓΔ)$

(iii) $E(ABΓ) = \frac{1}{λ} E(AΓΔ)$



Λύση: (i) Έστω προς άτοπο, $λ = 1$. Τότε:

$$\frac{|ΟΔ|}{|ΟΓ|} = \frac{|ΟΕ|}{|ΟΒ|} = 1 \Rightarrow |ΟΔ| = |ΟΓ| \text{ κ' } |ΟΕ| = |ΟΒ|,$$

που σημαίνει ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΔΕΓΒ διχοτομούνται, άρα το ΔΕΓΒ είναι παρ/μο. Άτοπο διότι οι ΔΒ και ΕΓ όχι παράλληλες (τέμνονται στο Α).

Συνεπώς, $\lambda \neq 1$.

(ii) Από δοσμένες αναλογίες και το αντίστροφο του θεωρήματος του ΘΑΛΗ προκύπτει ΔΕ//ΒΓ. Έτσι, $E(\Delta B\Gamma) = E(BE\Gamma)$ (διότι έχουν ίσες βάσεις ΒΓ και ίσα ύψη προς την ΒΓ)

Άρα, $E(A\Gamma\Delta) = E(AB\Gamma) - E(\Delta B\Gamma)$
$= E(AB\Gamma) - E(BE\Gamma)$
$= E(ABE)$

(iii) $E(AB\Gamma) = \frac{1}{2}|AB| \cdot \upsilon_\Gamma$ ίδια

$E(A\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}|A\Delta| \cdot \upsilon_\Gamma$

αρκεί να δειχθεί ότι $\frac{|A\Delta|}{|AB|} = \lambda$

. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια
$\hat{A}$: κοινή, $\hat{\Delta} = \hat{B}$, $\hat{E} = \hat{\Gamma}$ (από ΔΕ//ΒΓ)

άρα: $\frac{|\Delta E|}{|B\Gamma|} = \frac{|AE|}{|A\Gamma|} = \frac{|A\Delta|}{|AB|}$ (1)

Επίσης, τα τρίγωνα ΟΔΕ και ΒΟΓ όμοια:

$\hat{O_1} = \hat{O_2}$ (κατακορυφήν), $\hat{Δ_1} = \hat{Γ_1}$, $\hat{E_1} = \hat{B_1}$ (εντός εναλλάξ των ΔΕ//ΒΓ με τέμνουσες τις ΔΓ και ΒΕ, αντίστοιχα).

Άρα: $\dfrac{|ΔΕ|}{|ΒΓ|} = \dfrac{|ΟΔ|}{|ΟΓ|} = \dfrac{|ΟΕ|}{|ΟΒ|} = λ$ (2)

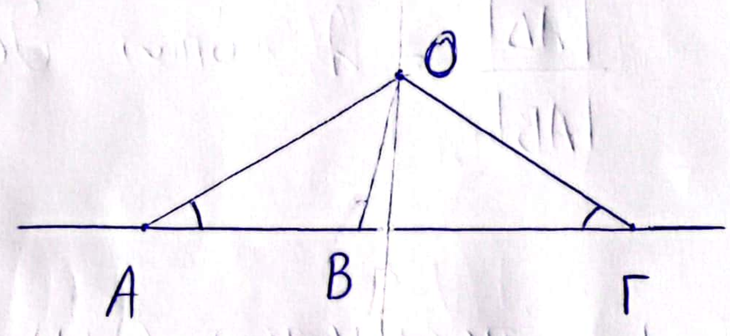
Από (1), (2): $\dfrac{|ΑΔ|}{|ΑΒ|} = λ$, όπως θέλαμε. ∎

(II) Τι ονομάζουμε περίμετρο ενός κύκλου Ο(r); [ΘΕΩΡΙΑ]

(III) Να αποδείξετε ότι α) η μεσοκάθετος ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος. β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει κύκλος που να διέρχεται από τρία συνευθειακά σημεία.

<u>Λύση</u>: α) Θεωρία

β) Έστω κύκλος $O(r)$ που διέρχεται από 3 συνευθειακά σημεία Α, Β και Γ



$|OA| = |OΓ| = r \Rightarrow O$: σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΓ

$|OA| = |OB| = r \Rightarrow O$: σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ

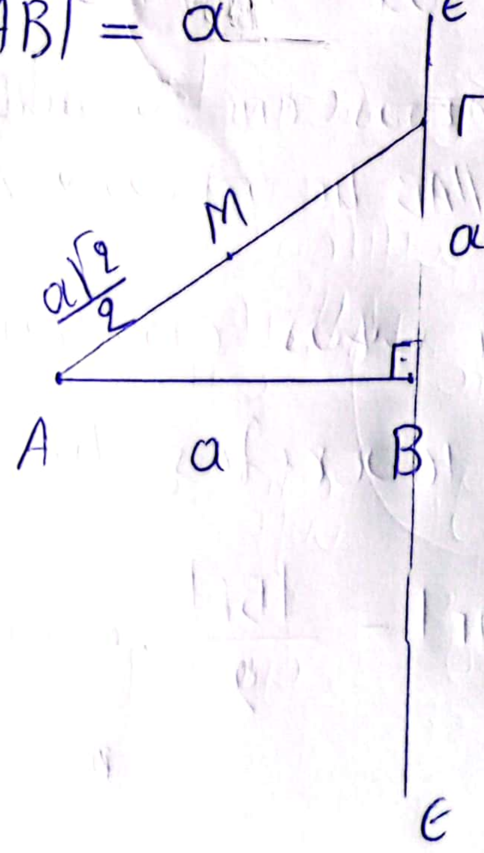
Επειδή ΑΒ//ΑΓ, από το Ο θα υπήρχαν δύο κάθετες προς την ίδια ευθεία, άτοπο.

(IV) Αποδείξτε ότι αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και η ε_1 τέμνει τη δ τότε και η ε_2 τέμνει τη δ.

<u>Λύση</u>: ΘΕΩΡΙΑ (Αξίωμα Παραλληλίας)

(V) Δοθέντος ενός ευθύγραμμου τμήματος μήκους α να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

<u>Λύση</u>: Έστω ευθύγραμμο τμήμα AB με $|AB| = \alpha$

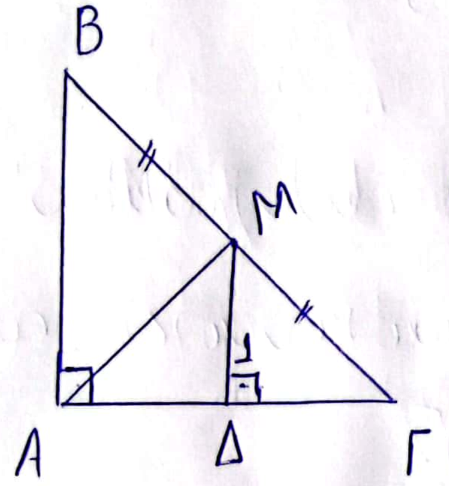


Θεωρώ την κάθετη $\varepsilon'\varepsilon \perp AB$ στο σημείο B. Επί της $B\varepsilon'$ έστω σημείο Γ : $|B\Gamma| = \alpha$

Από Πυθαγόρειο θεώρημα: $|A\Gamma| = \alpha\sqrt{2}$

Αν M μέσον της $A\Gamma$ τότε $|AM| = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

(VI) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος από την ορθή γωνία $\hat{A}$ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισούται με το μισό της υποτείνουσας.



<u>Λύση</u>:

ΑΜ: διάμεσος

Θδο $|AM| = |M\Gamma|$.

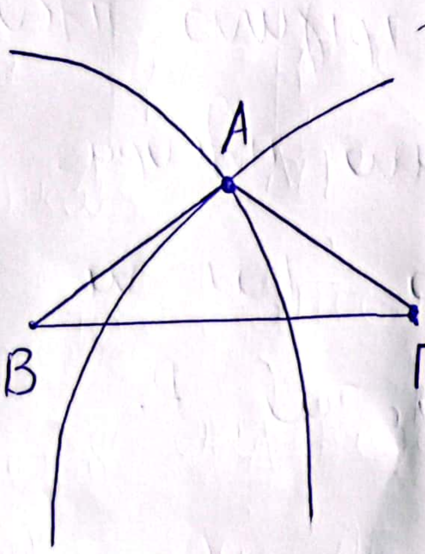
Θεωρούμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΔΓ. Επειδή ΜΔ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ, έπεται ΜΔ//ΑΒ και άρα $\underset{}{\hat{\Delta}_1} = \underset{=1L}{\hat{A}}$ [εντός εκτός επί τα αυτά των ΜΔ//ΑΒ με τέμνουσα ΑΔ]

Επειδή ΜΔ: διάμεσος και ύψος στο τρίγωνο ΑΜΓ συμπεραίνουμε ΑΜΓ: ισοσκελές με βάση ΑΓ, άρα: $|AM| = |M\Gamma| = \dfrac{|B\Gamma|}{2}$

∎

(VII) Δίνονται ευθύγραμμα τμήματα ε και δ. Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο με πλευρές ε, δ, δ.

<u>Λύση</u>: Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ με $|ΒΓ| = ε$



Θεωρούμε τους κύκλους Β(δ) και Γ(δ) οι οποίοι τέμνονται διότι:

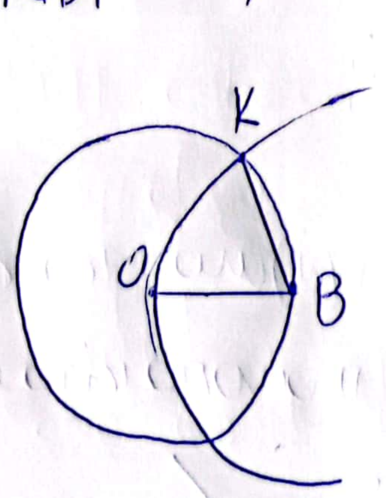
$$|δ-δ| = 0 < |ΒΓ| = ε \underset{(*)}{<} δ+δ$$

(*): Για να δημιουργούν τρίγωνο ισοσκελές οι ε, δ, δ πρέπει να ικανοποιείται η τριγωνική: $|δ-δ| < ε < δ+δ$ ✓

Αν A το σημείο τομής των κύκλων $B(\delta)$ και $\Gamma(\delta)$ τότε: το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $|AB| = |A\Gamma| = \delta$ και $|B\Gamma| = \epsilon$

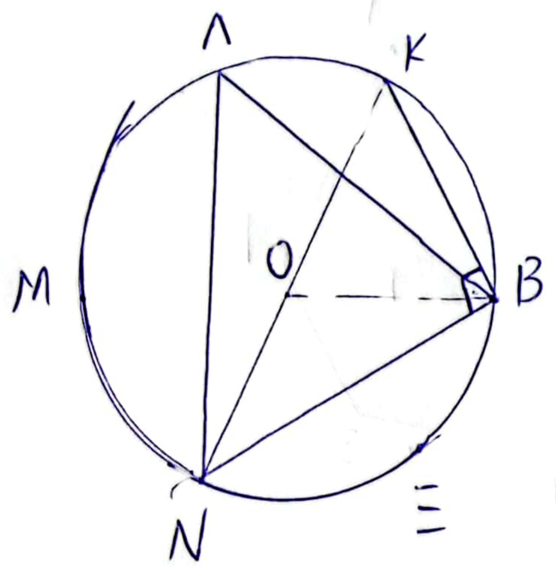
(√ III) Δίνεται κύκλος $O(R)$. Να κατασκευάσεις ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς λ_3 καθώς και τετράγωνο πλευράς λ_4, εγγεγραμμένα στον κύκλο, και να βρεθούν τα λ_3, λ_4 συναρτήσει του R.

<u>Λύση</u>: Ισόπλευρο Τρίγωνο: Θεωρώ ευθύγραμμο τμήμα $|OB| = R$, πχ: OB: ακτίνα.



Στη συνέχεια, έστω κύκλος $B(R)$ που τέμνει τον $O(R)$ στο K

Τότε $|BK| = R$. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι να κατασκευάσουμε κανονικό εξάγωνο ΒΚΛΜΝΞ εγγεγραμμένο στον $O(R)$, πλευράς R και γωνίας πολυγώνου $120°$.



Τότε ΒΛΝ ισόπλευρο τρίγωνο (διότι:

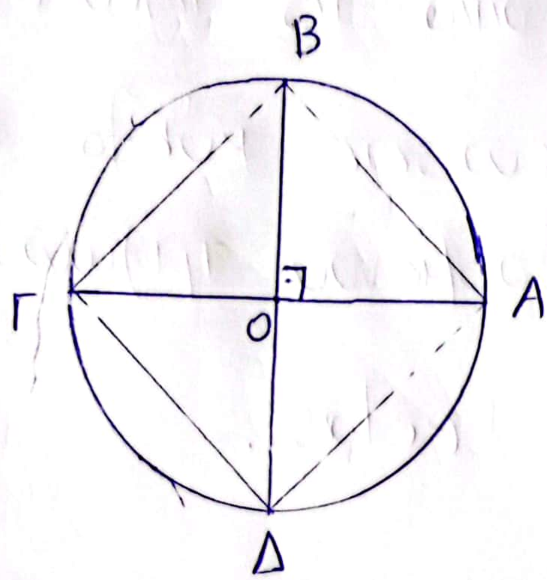
$$\hat{\Lambda} = \frac{\overset{\frown}{BN}}{2} = 60°, \quad \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{\Lambda N}}{2} = 60°, \quad \hat{N} = \frac{\overset{\frown}{\Lambda B}}{2} = 60° \Big)$$

και είναι το ζητούμενο τρίγωνο. Επειδή KN διάμετρος, έπεται $\hat{B} = 1L$, άρα από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΚΒΝ προκύπτει:

$$|BN|^2 = |KN|^2 - |KB|^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$$

και συνεπώς $|BN| = R\sqrt{3} = \lambda_3$

Τετράγωνο: Θεωρούμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ του κύκλου Ο(R)



Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα, άρα ΑΒΓΔ: ρόμβος. Λόγω Πυθαγορείου θεωρήματος στα ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ βρίσκουμε:

$$|AB| = |B\Gamma| = |\Gamma\Delta| = |\Delta A| = R\sqrt{2}.$$

Ώστε, ΑΒΓΔ είναι το ζητούμενο τετράγωνο πλευράς $\lambda_4 = R\sqrt{2}$.

(IX) (α) Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας $x\hat{O}y$ είναι ο γεωμετρικός τόπος των εσωτερικών σημείων της $x\hat{O}y$ που ισαπέχουν από τις πλευρές της $x\hat{O}y$.

(β) Να κατασκευάσετε κύκλο που εφάπτεται στις 3 πλευρές δοσμένου τριγώνου ΑΒΓ.

<u>Λύση</u>: Θεωρία eclass.

(X) (α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

(β) Βασικές Κατασκευές και Βασικοί Γεωμετρικοί Τόποι

(γ) Κατασκευή Χρυσής Τομής.

<u>Λύση</u>: Θεωρία eclass και ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ

(XI) Δίνεται κύκλος $O(r)$ και σημείο P εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του $O(r)$ η οποία διέρχεται από το P.

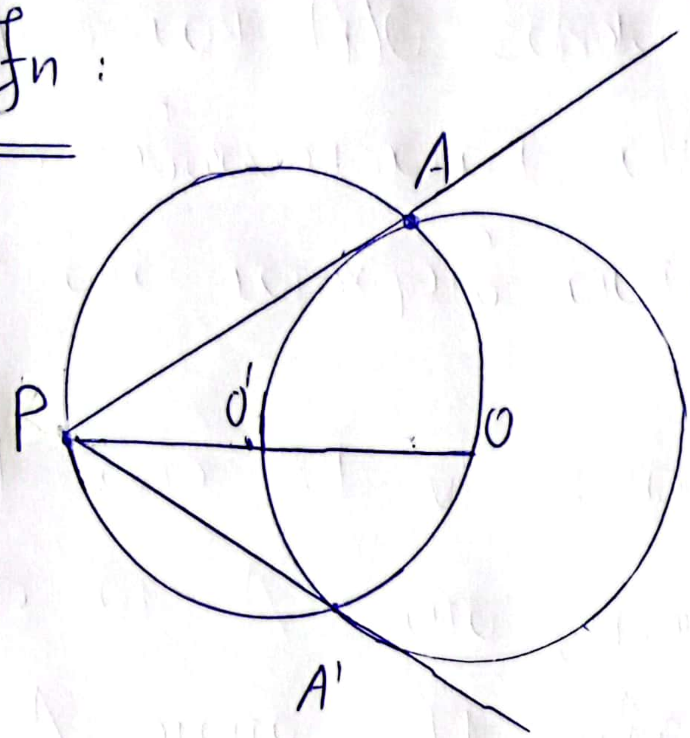
Λύση: Ανάλυση: Αν PA είναι μια τέτοια εφαπτόμενη, όπου A το σημείο επαφής τότε $O\hat{A}P = 1L$, οπότε A: κοινό σημείο του $O(r)$ και του κύκλου με διάμετρο το γνωστό τμήμα OP.

Σύνθεση - Κατασκευή: Με διάμετρο OP γράφουμε κύκλο $O'\left(\frac{|OP|}{2}\right)$. Οι κύκλοι $O(r)$ και $O'\left(\frac{|OP|}{2}\right)$ τέμνονται διότι:

$$\left|r-\frac{|OP|}{2}\right| = |r-OO'| < |OO'| < r+|OO'| = r+\frac{|OP|}{2}.$$

Αν A και A' τα σημεία τομής τους τότε PA και PA' οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

Απόδειξη:



Ισχύει $O\hat{A}P = O\hat{A'}P = 1L$ ως εγγεγραμμένες γωνίες του $O'\left(\frac{|OP|}{2}\right)$ που βαίνουν στο ημικύκλιο $\overset{\frown}{OP}$. Ώστε, $OA \perp PA$, $OA' \perp PA'$ και άρα PA, PA' είναι εφαπτόμενες του $O(r)$.

Διερεύνηση: Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις διότι οι κύκλοι $O'\left(\frac{|OP|}{2}\right)$ και $O(r)$ τέμνονται.