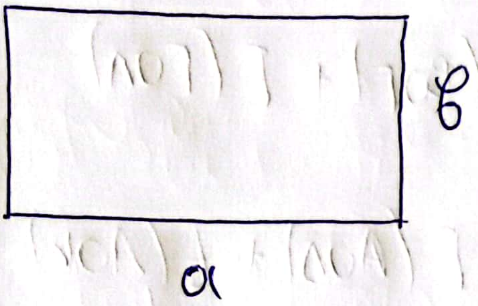
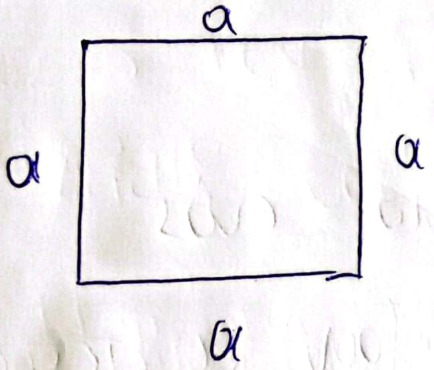
# Εμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου




$E = \alpha\beta$

# Εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α

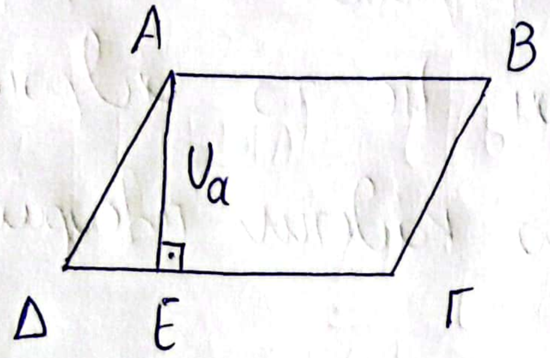



$E = \alpha^2$

**H/W**: Αποδείξτε γεωμετρικά την

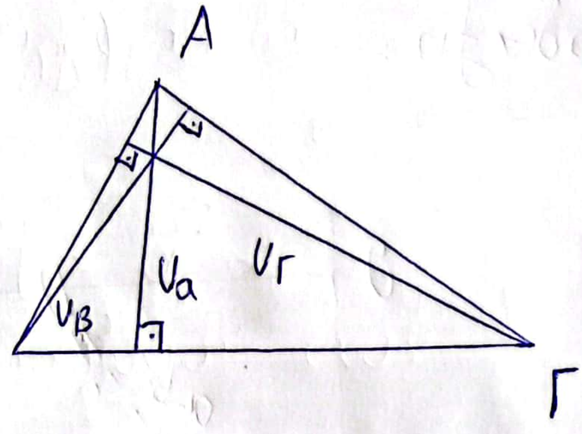
ταυτότητα $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

## Εμβαδόν παραλληλογράμμου:




$$E = |ΔΓ| \cdot υ_α$$

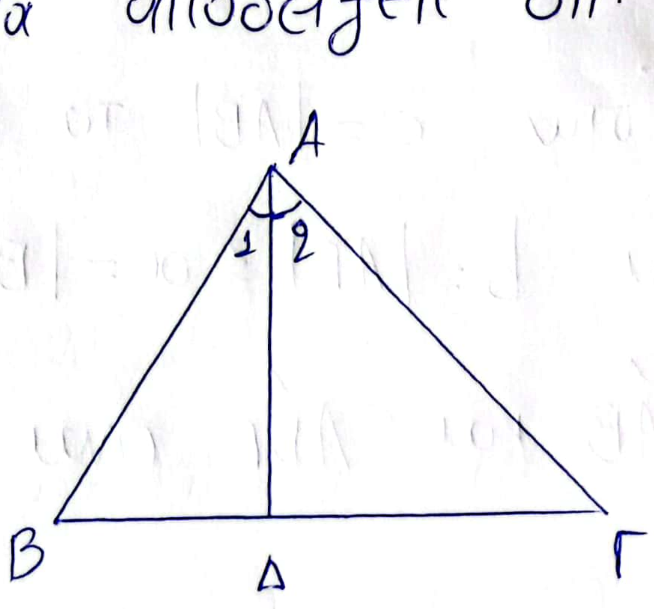
## Εμβαδόν τριγώνου:




$$E = \frac{1}{2}|ΒΓ| \cdot υ_α = \frac{1}{2}|ΑΓ| \cdot υ_Β = \frac{1}{2}|ΑΒ|\, υ_Γ$$

**H/W**: Έστω ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

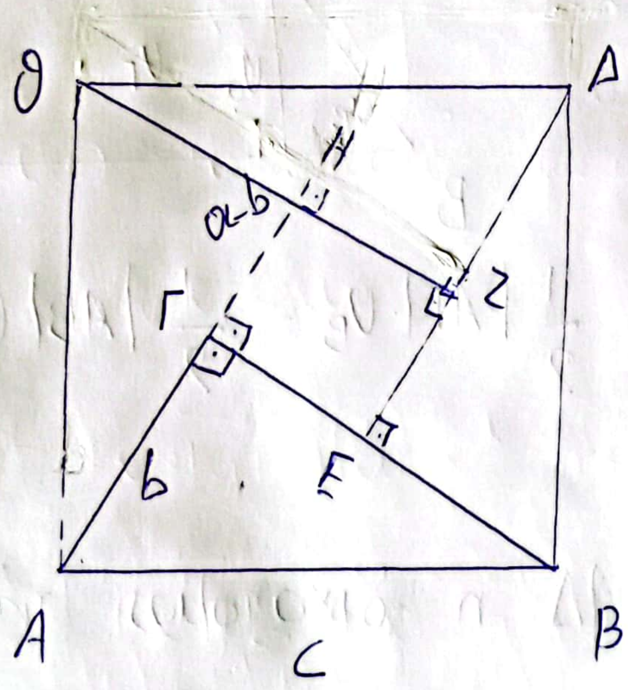
$$\frac{|ΒΔ|}{|ΔΓ|} = \frac{|ΑΒ|}{|ΑΓ|}$$



# ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών του.

## Απόδειξη:




Έστω $c = |AB|$ το μήκος της υποτείνουσας και $b = |A\Gamma| \leq a = |B\Gamma|$. Επειδή οι $\Gamma\hat{A}B$ και $A\hat{B}\Gamma$ είναι συμπληρωματικές

Το τρίγωνο μπορεί να τοποθετηθεί στις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου με πλευρά $c = |BA|$. Τότε ΗΖΕΓ τετράγωνο πλευράς $a-b$. Γράφουμε:

$$c^2 = E(AB\Delta\Theta) = 4E(AB\Gamma) + E(HZE\Gamma)$$

$$\Rightarrow c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} ab + (a-b)^2 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

(*) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3.2.1 γεωμ.

Αν $a = b$ OK.

Αν $a > b$ τότε: $(a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b) = [(a-b)+b]^2 \Rightarrow (a-b)^2 + b^2 + 2ba - 2b^2 = a^2$

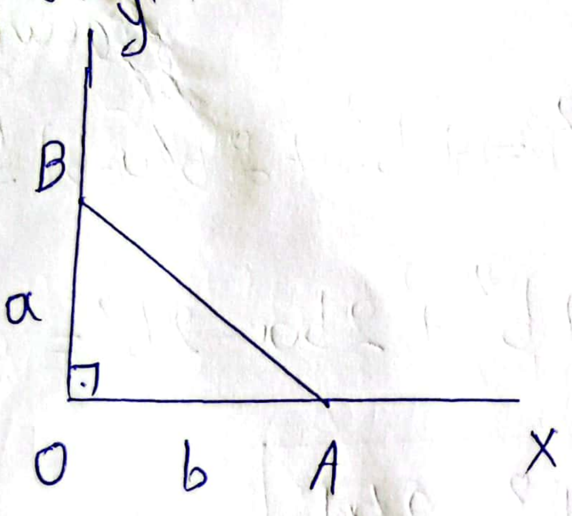
$$\Rightarrow \boxed{(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab}$$

H/W: $b(a-b) = ba - b^2$ για $a > b$.

# Αντίστροφο Πυθαγορείου θεωρήματος

Αν τα μήκη $a, b$ και $c$ των πλευρών τριγώνου ικανοποιούν την $a^2+b^2=c^2$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα μήκους $c$ και κάθετες πλευρές μήκους $a$ και $b$.

**Απόδειξη:** Έστω ορθή γωνία $x\hat{O}y$ στις πλευρές της οποίας τοποθετούμε ευθύγραμμα τμήματα $|OA|=b$ και $|OB|=a$



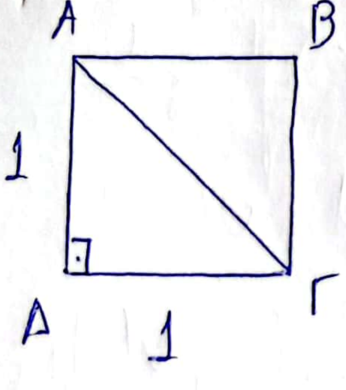

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα το ορθογώνιο τρίγωνο $AOB$ έχει

Υποτείνουσα $|AB|$ με $|AB|^2 = a^2 + b^2 = c^2$.

Το δοθέν τρίγωνο και το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχουν αντίστοιχες πλευρές ίσες και άρα θα είναι ίσα. Ώστε το δοθέν είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία απέναντι από την $c$. ■

<u>Πόρισμα</u>: Οι τετραγωνικές ρίζες των ακεραίων $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη.

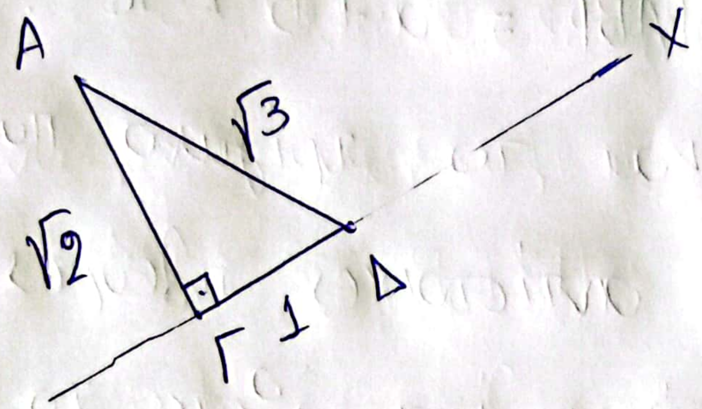
<u>Απόδειξη</u>: Ξεκινάμε με τη διαγώνιο ΑΓ του μοναδιαίου τετραγώνου ΑΒΓΔ




που έχει μήκος

$$|ΑΓ|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

δηλαδή: $|ΑΓ| = \sqrt{2}$




Θεωρούμε την $\Gamma x \perp A\Gamma$ (στο σημείο Γ) και επί της $\Gamma x$ παίρνουμε σημείο Δ ώστε $|\Gamma\Delta| = 1$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε: $|A\Delta|^2 = |A\Gamma|^2 + |\Gamma\Delta|^2 = 2+1 = 3$,

οπότε: $|A\Delta| = \sqrt{3}$.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία χρησιμοποιώντας κάθε φορά την πλευρά που κατασκευάσαμε $\sqrt{\kappa}$ και μια πλευρά μήκους 1 ως κάθετες για να ορίσουμε την επόμενη ρίζα $\sqrt{\kappa+1}$.

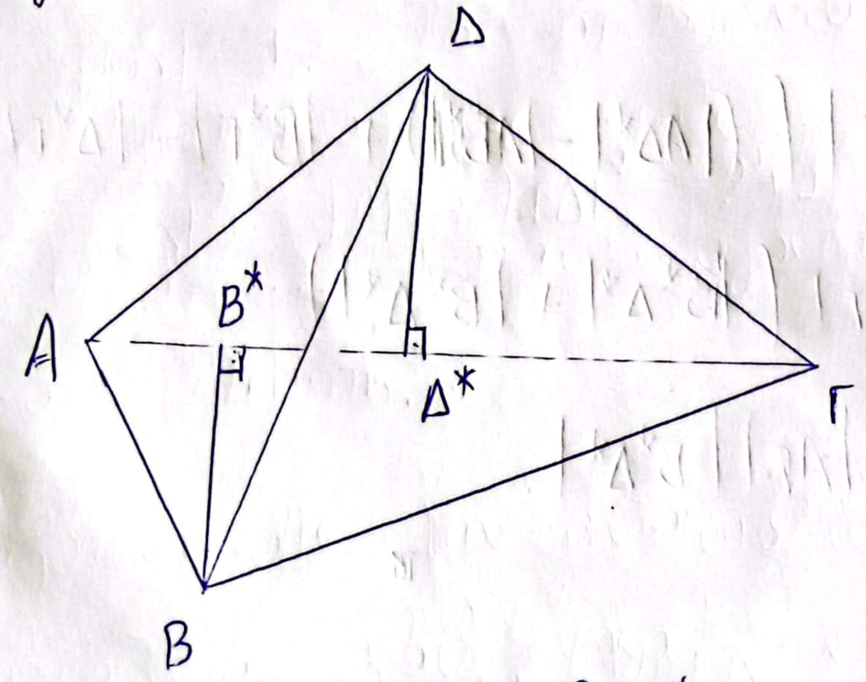
Η/Υ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ: 3.4.3, 3.4.4, 3.4.5

<u>Άσκηση</u>: Σε κάθε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει η σχέση:

$$\left(|AB|^2+|\Gamma\Delta|^2\right)-\left(|B\Gamma|^2+|A\Delta|^2\right)=2|A\Gamma||B^*\Delta^*|$$

όπου $B^*, \Delta^*$ οι προβολές των $B, \Delta$ επί της διαγωνίου $A\Gamma$.

<u>Λύση</u>:




Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\begin{aligned}|\Delta A|^2-|\Delta\Gamma|^2 &= |A\Delta^*|^2-|\Delta^*\Gamma|^2\\ &=\left(|A\Delta^*|-|\Delta^*\Gamma|\right)\left(|A\Delta^*|+|\Delta^*\Gamma|\right)\\ &=|A\Gamma|\left(|A\Delta^*|-|\Delta^*\Gamma|\right) \quad (1)\end{aligned}$$

Επίσης:

$$|B\Gamma|^2-|BA|^2 = |B^*\Gamma|^2-|AB^*|^2$$
$$= (|B^*\Gamma|+|AB^*|)(|B^*\Gamma|-|AB^*|)$$
$$= |A\Gamma|(|B^*\Gamma|-|AB^*|) \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$(|\Delta A|^2+|B\Gamma|^2)-(|\Delta\Gamma|^2+|BA|^2) =$$
$$|A\Gamma|(|A\Delta^*|-|\Delta^*\Gamma|+|B^*\Gamma|-|A^*B^*|)$$
$$= |A\Gamma|\left((|A\Delta^*|-|AB^*|)+|B^*\Gamma|-|\Delta^*\Gamma|\right)$$
$$= |A\Gamma|(|B^*\Delta^*|+|B^*\Delta^*|)$$
$$= 2|A\Gamma||B^*\Delta^*|.$$

∎

**H/W**: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ: 3.4.12

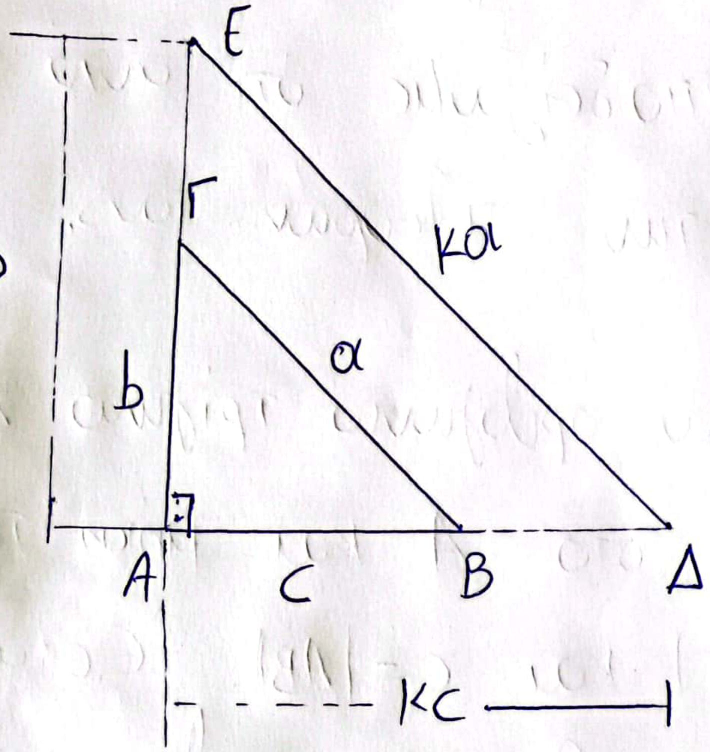
# Όμοια Ορθογώνια Τρίγωνα

Δύο ορθογώνια τρίγωνα λέγονται <u>όμοια</u> αν, εκτός της ορθής, έχουν και δύο ακόμη αντίστοιχες γωνίες τους ίσες (άρα και όλες τις γωνίες τους αντίστοιχα ίσες). Θα αποδείξουμε ότι αυτό οδηγεί σε αναλογία των πλευρών τους.

<u>Πρόταση</u>: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή γωνία στο Α και μήκη πλευρών $\alpha = |B\Gamma|$, $b = |A\Gamma|$ και $c = |AB|$. Έστω επίσης $\kappa$ ένας θετικός αριθμός. Επί των καθέτων ημιευθειών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Δ και Ε ώστε $|A\Delta| = \kappa c$ και $|AE| = \kappa b$. Το τρίγωνο που προκύπτει ΑΔΕ είναι

ορθογώνιο, η υποτείνουσά του ΔΕ είναι παράλληλη της ΒΓ και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Απόδειξη :




Το ΑΔΕ είναι ορθογώνιο στο Α με

$$(\Delta E)^2 = (AE)^2 + (A\Delta)^2 = (kb)^2 + (kc)^2$$
$$= k^2(b^2+c^2)$$
$$= k^2 a^2$$

οπότε: $\Delta E = k\alpha$

$$E(\text{ΑΔΕ}) = \frac{1}{2}\kappa^2 bc \Longrightarrow$$

$$E(\text{ΑΒΓ}) + E(\text{ΓΖΔΒ}) + E(\text{ΕΓΖ}) = \frac{1}{2}\kappa^2 bc \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}bc + E(\text{ΓΖΔΒ}) + \frac{1}{2}(\kappa-1)b(\kappa-1)c = \frac{1}{2}\kappa^2 bc$$

$$\Longrightarrow bc + 2E(\text{ΓΖΔΒ}) + bc\kappa^2 - 2bc\kappa + bc = \kappa^2 bc$$

$$\Longrightarrow 2E(\text{ΓΖΔΒ}) = 2bc\kappa - 2bc$$

$$\Longrightarrow E(\text{ΓΖΔΒ}) = bc(\kappa-1)$$

Επειδή συμβαίνει $|ΒΔ| = c(\kappa-1)$ η προηγούμενη ισότητα δείχνει ότι το ΓΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες.

∎

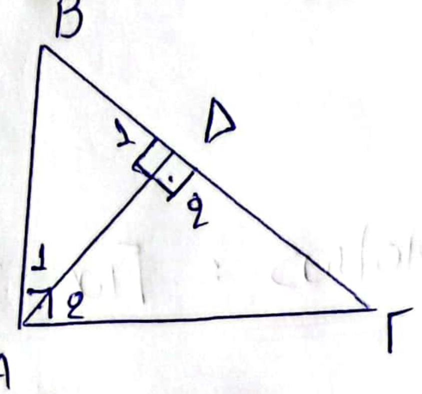
Με παρόμοιο σκεπτικό αποδεικνύουμε και το αντίστροφο.

<u>Πρόταση</u>: Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις ίδιες γωνίες έχουν τις πλευρές τους αντίστοιχα ανάλογες. Αντίστροφα, δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ανάλογες έχουν αντίστοιχα ίσες γωνίες.

Η πρόταση αυτή σε συνδυασμό με το Πυθαγόρειο θεώρημα δίνει το

<u>Πόρισμα</u>: Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια τότε και μόνον, όταν έχουν τον ίδιο λόγο καθέτων πλευρών ή όταν έχουν τον ίδιο λόγο μιας καθέτου προς την υποτείνουσα.

Εφαρμογή: Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 1L$. Από το Α φέρνουμε κάθετη προς την υποτείνουσα ΒΓ, που τέμνει τη ΒΓ στο Δ.




Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ έχουν: $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = 1L$, $\hat{B} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{A}_1$.

Όντας όμοια, παίρνουμε:

$$\frac{|B\Gamma|}{|AB|} = \frac{|A\Gamma|}{|A\Delta|} = \frac{|AB|}{|B\Delta|}$$

άρα: $|AB|^2 = |B\Gamma||B\Delta|$

Επίσης, τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι: $\hat{\Delta}_2 = \hat{A} = 1L$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}$, $\hat{A}_2 = \hat{B}$,

οπότε: $\dfrac{|A\Gamma|}{|B\Gamma|} = \dfrac{|A\Delta|}{|AB|} = \dfrac{|\Delta\Gamma|}{|A\Gamma|}$, άρα:

$|A\Gamma|^2 = |\Delta\Gamma||\Delta B|$.

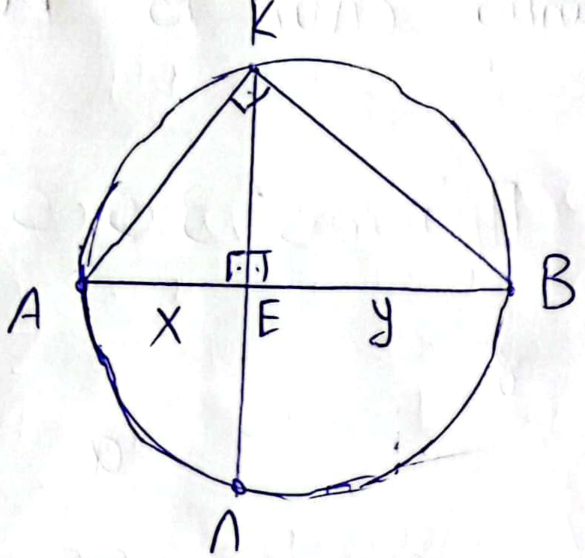
Τέλος, από ομοιότητα των $A\Delta B$ και $A\Delta\Gamma$

προκύπτει: $|A\Delta|^2 = |B\Delta||\Gamma\Delta|$. ☑

Ορισμός : Για τρεις αριθμούς $x, y$ και $z$ που ικανοποιούν τη σχέση $z^2 = xy$ λέμε ότι ο $z$ είναι ο γεωμετρικός μέσος των $x, y$.

Κατασκευή : Δοθέντων ευθυγράμμων τμημάτων μήκους $x$ και $y$ να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη, ευθύγραμμο τμήμα μήκους $z$ ώστε $z^2 = xy$

Λύση: Τοποθετούμε τα δύο τμήματα επί της ίδιας ευθείας ώστε να γίναν διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματά της, AE, με $|AE| = x$ και EB, με $|EB| = y$.

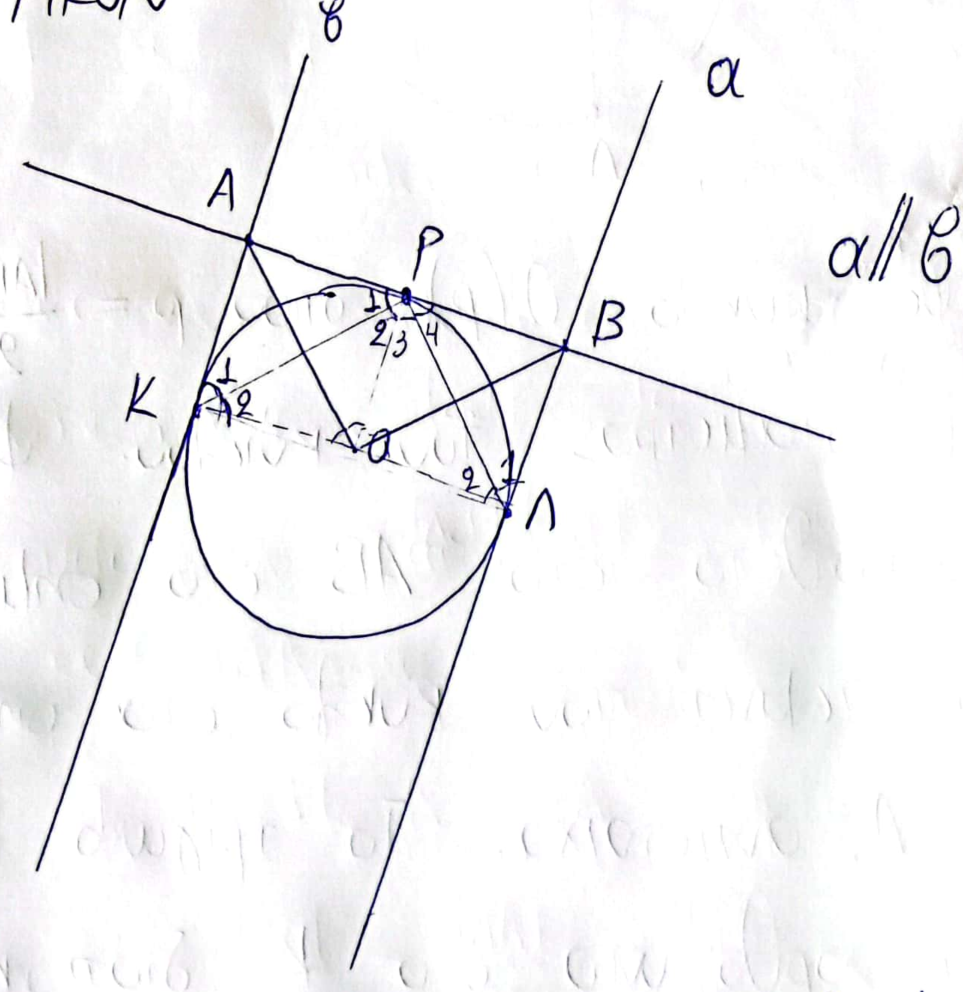



Γράψε κύκλο $O(\rho)$, όπου $\rho = \frac{|AB|}{2}$, δηλαδή $|AB|$: διάμετρος του κύκλου. Φέρουμε την κάθετο στο AB στο σημείο E η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία K και Λ, αντίστοιχα. Το τρίγωνο AKB είναι ορθογώνιο στο K διότι η εγγεγραμμένη γωνία στον κύκλο K, βαίνει

στο ημικύκλιο $AB$. Συνεπώς το $AE$ είναι το ύψος από την ορθή γωνία $K$ προς την υποτείνουσα $AB$, άρα από την προηγούμενη εφαρμογή: $|KE|^2 = |AE||E\Delta| = xy$.
Το ζητούμενο τμήμα είναι το $KE = z$.

<u>HW</u>: Απόδειξη Πρότασης 3.5.5 στο
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ

<u>Άσκηση</u>:




Να δείξεις ότι $|PA||PB| = σταθερό$