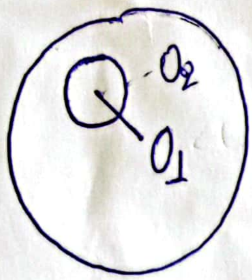
Θέσεις Δύο Κύκλων

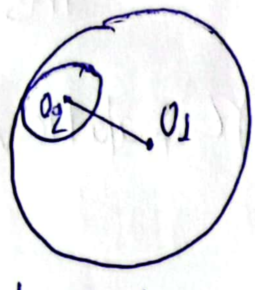
Πρόταση: Δύο διαφορετικοί κύκλοι έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Απόδειξη: Αν είχαν τρία ή περισσότερα κοινά σημεία, τότε θα ταυτίζονταν, άτοπο. ■

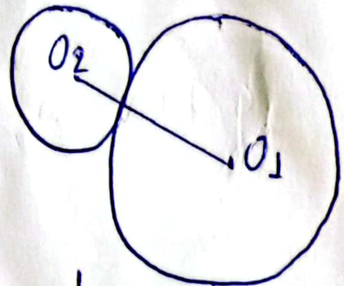
Για δύο κύκλους (O_1, ρ_1) και (O_2, ρ_2) με $\rho_1 \geq \rho_2$ έχουμε τα ακόλουθα:



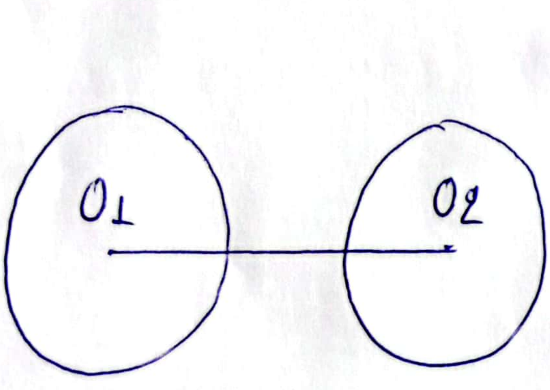
$|O_1O_2| \leq \rho_1 - \rho_2$



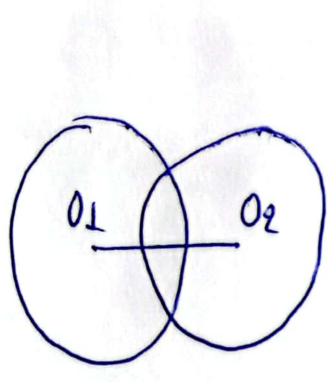
$|O_1O_2| = \rho_1 - \rho_2$



$|O_1O_2| = \rho_1 + \rho_2$



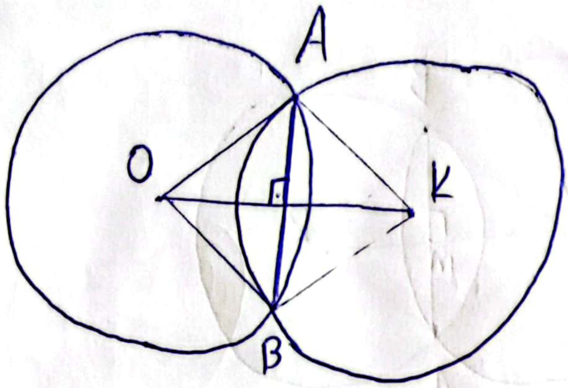
$|O_1O_2| > \rho_1 + \rho_2$



$|O_1O_2| < \rho_1 + \rho_2$

Πόρισμα: Η διάκεντρος ΟΚ δύο κύκλων που τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β συμπίπτει με τη μεσοκάθετο της κοινής χορδής τους ΑΒ.

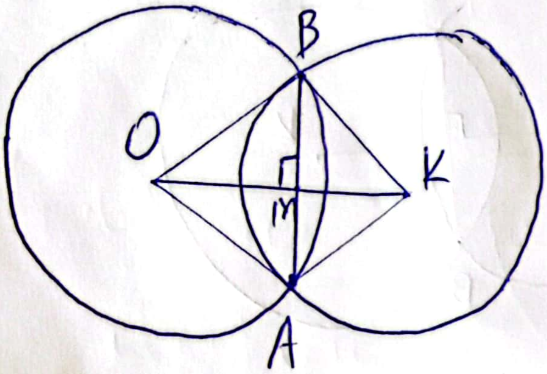
Απόδειξη:



Επειδή τα Ο και Κ ισαπέχουν από τα άκρα Α και Β του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, θα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΒ ▪

Πρόταση: Το σημείο τομής δύο εφαπτομένων κύκλων βρίσκεται επί της διακέντρου αυτών. Αντίστροφα, αν οι κύκλοι έχουν ένα σημείο τομής επί της διακέντρου, τότε αυτό είναι το μοναδικό σημείο τομής τους και οι κύκλοι εφάπτονται.

Απόδειξη: "⟹" Έστω A το σημείο τομής των δύο κύκλων (O, ρ) και (K, ρ').
Υποθέτουμε προς άτοπον, ότι το A δεν είναι στην διάκεντρο OK.



Φέρουμε $AM \perp OK$ και προεκτείνουμε κατά διπλάσιο τμήμα ως το B. Τότε τα τρίγωνα OMA και OMB είναι ίσα (Π-Γ-Π). Ανάλογα τα KMA και KMB είναι ίσα (Π-Γ-Π), άρα:

$$|OA| = |OB| = \rho$$
$$|KA| = |KB| = \rho'$$

δηλαδή το B είναι κοινό σημείο των δύο κύκλων, άτοπο.

$\Leftarrow$ Αν οι κύκλοι έχουν δύο σημεία τομής Α και Β τότε η διάκεντρος συμπίπτει με τη μεσοκάθετο του ΑΒ και κανένα από τα δύο σημεία δεν μπορεί να είναι επί της διακέντρου.

<u>Πόρισμα:</u> Δύο κύκλοι $O(\rho)$ και $K(\rho')$ εφάπτονται αν-ν ισχύει μια από τις ισότητες:

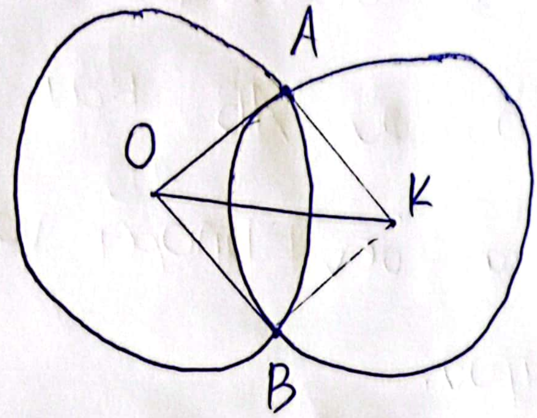
$$\rho+\rho' = |OK| \quad , \quad |\rho-\rho'| = |OK|$$

(εξωτερικά) (εσωτερικά)

<u>Πρόταση:</u> Δύο κύκλοι $O(\rho)$ και $K(\rho')$ τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία αν-ν $|\rho-\rho'| < |OK| < \rho+\rho'$

Απόδειξη

"$\Longrightarrow$"



Στο τρίγωνο ΚΟΒ έχουμε από τριγωνική ανισότητα ότι:

$$|OB-BK| < |OK| < |OB+BK| \Longrightarrow$$

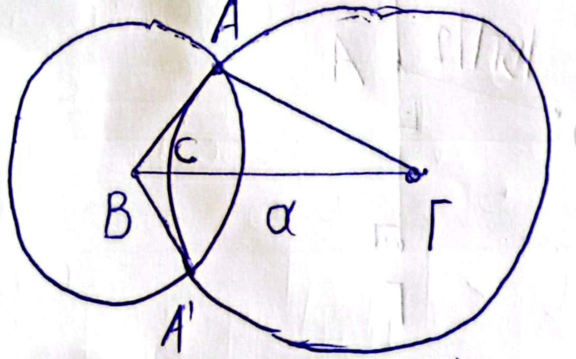
$$|\rho-\rho'| < |OK| < |\rho+\rho'|$$

"$\Longleftarrow$" Έστω $|\rho-\rho'| < |OK| < \rho+\rho'$. Αν οι κύκλοι εφάπτονται τότε $|\rho-\rho'| = |OK|$ ή $\rho+\rho' = |OK|$, άτοπο. Αν δεν τέμνονται τότε $\rho+\rho' < |OK|$ ή $|\rho-\rho'| > |OK|$, άτοπο.

Συνεπώς έχουν δύο κοινά σημεία. ∎

Πρόταση: Έστω α, b, c θετικοί αριθμοί. Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών α, b και c, αν-ν $|b-c| < \alpha < b+c$.

Απόδειξη: Αν τα α, b και c είναι μήκη πλευρών τριγώνου, τότε ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες. Αντίστροφα, αν $|b-c| < \alpha < b+c$, τότε θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα μήκους α, έστω ΒΓ.

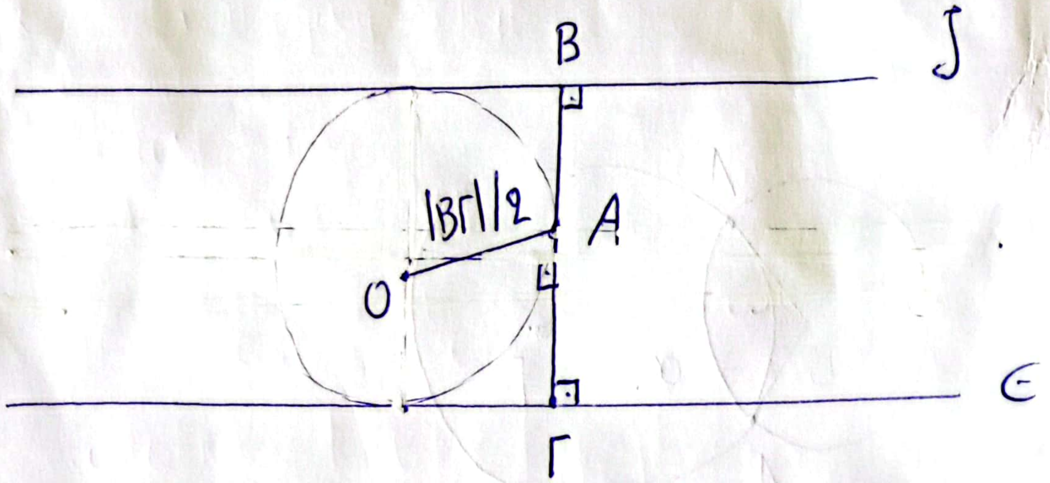


Με κέντρα τα σημεία Β και Γ, γράφουμε κύκλους ακτίνας c και b. Επειδή $|b-c| < \alpha < b+c$ οι κύκλοι τέμνονται

σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Α'.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο. ■

<u>Άσκηση 2.3.4</u> (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ) Δίνονται δύο παράλληλες ευθείες ε και δ και σημείο Α μη-περιεχόμενο σε αυτές. Να κατασκευάσετε κύκλο διερχόμενο από το Α και εφαπτόμενο των δύο ευθειών.

<u>Λύση</u> (διδακτικό):

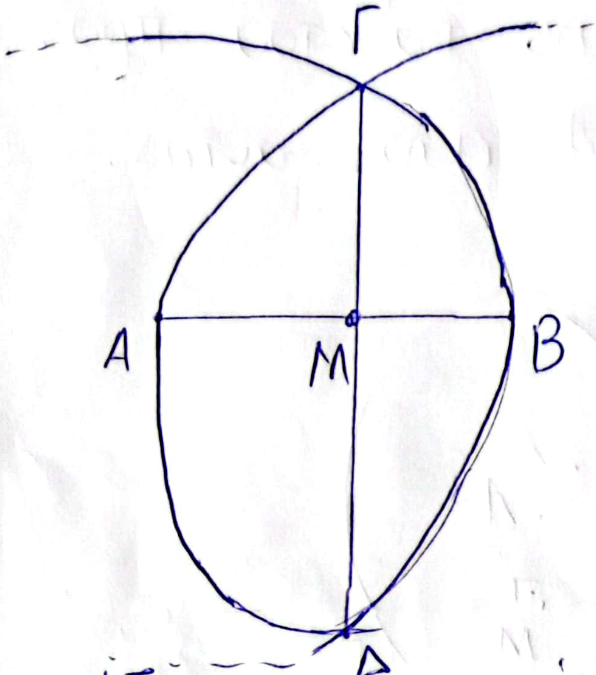


Φέρω τις κάθετες από το Α στις ε και δ, αντίστοιχα. Έστω σημείο Ο ώστε $|ΟΑ| = \frac{|ΒΓ|}{2} = ρ$

ο κύκλος $Ο(ρ)$ είναι ο ζητούμενος.

Κατασκευές

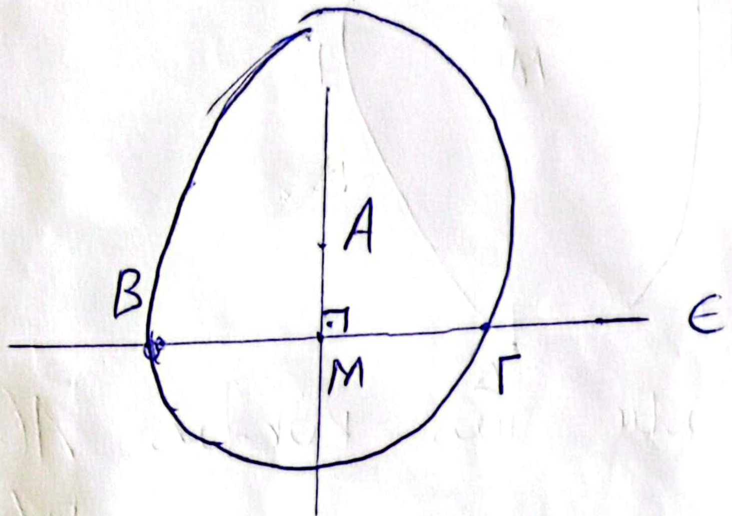
(1) Κατασκευή του μέσου Μ ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και της μεσοκαθέτου σε αυτό.



· Κατασκευάζουμε τους κύκλους $A(|AB|)$
$B(|AB|)$

Οι ακτίνες των δύο κύκλων ικανοποιούν τις τριγωνικές ανισότητες $0 < \rho < 2\rho$, όπου $\rho = |AB|$. Συνεπώς οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Γ και Δ. Τότε η διάκεντρος ΑΒ είναι η μεσοκάθετος της κοινής τους χορδής ΓΔ. Άρα Μ το μέσο του ΑΒ διότι ΑΒΓ: ισοσκελές και ΓΔ⊥ΑΒ. [Έξτρα κατασκευή ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ]

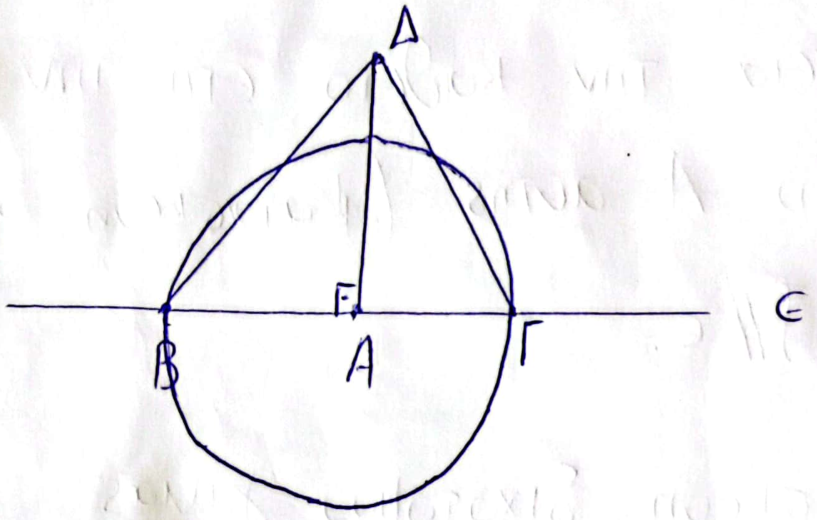
(2) Κατασκευή της καθέτου προς ευθεία ε από σημείο Α εκτός αυτής.



Επιλέγουμε σημείο Β της ε και με κέντρο Α και ακτίνα $\rho = |AB|$ γράφουμε κύκλο. Αν ο $A(\rho)$ δεν τέμνει την ε σε άλλο σημείο τότε η ε είναι εφαπτόμενη αυτού και επομένως κάθετη στην ΑΒ.

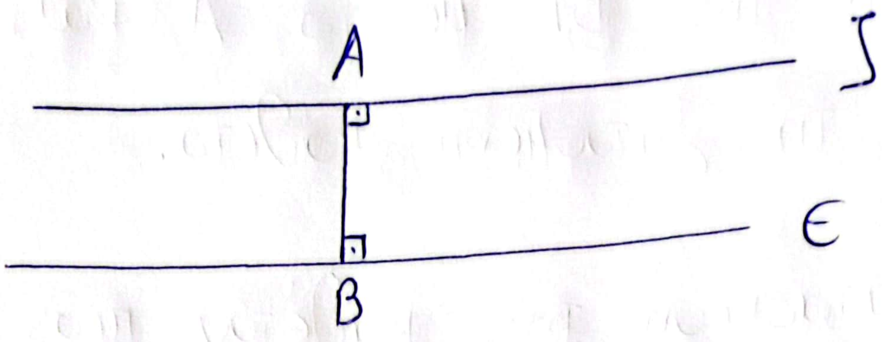
Αν ο κύκλος τέμνει την ε και σε ένα δεύτερο σημείο Γ, τότε ενώνουμε το μέσον Μ της ΒΓ με το Α και έτσι έχουμε τη ζητούμενη κάθετο.

(3) Κατασκευή της καθέτου προς ευθεία ε από σημείο Α της ευθείας.



Επιλέγουμε τυχόν $B \in (\epsilon)$ με $B \neq A$ και γράφουμε τον κύκλο $A(\rho)$, όπου $\rho = |AB|$, και που τέμνει την ε και στο Γ. Έστω το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΔΓ (κατασκευή (1)) και τότε η $A\Delta \perp \epsilon$.

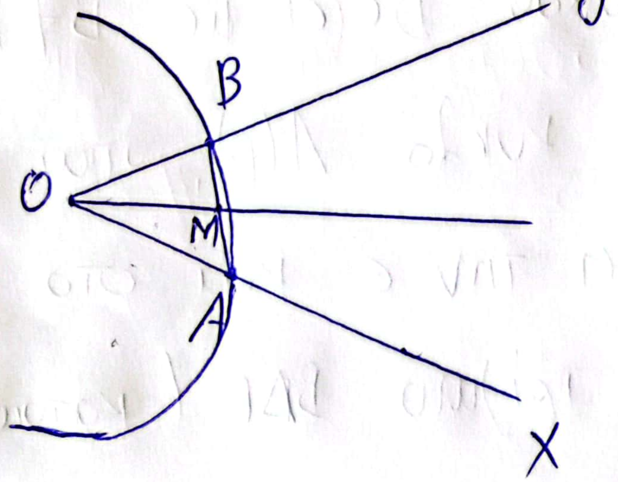
(4) Κατασκευή της παραλλήλου προς ευθεία ε από σημείο Α εκτός της ε.



Φέρουμε ΑΒ ⊥ ε (κατασκευή 2) και στη συνέχεια την κάθετο επί την ΑΒ στο σημείο Α αυτής (κατασκευή 3).

Τότε, ζ // ε.

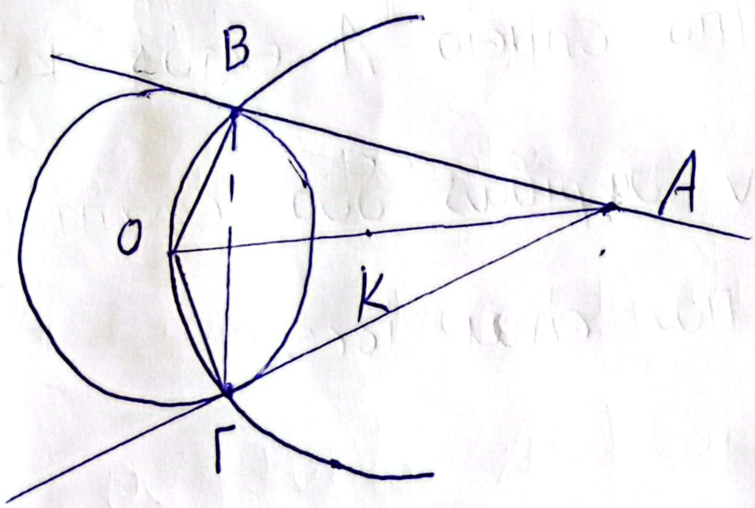
(5) Κατασκευή διχοτόμου γωνίας



Έστω σημείο A επί της Ox. Γράφουμε τον κύκλο $O(\rho)$, όπου $\rho = |OA|$, ο οποίος τέμνει την Oy στο σημείο B. Αν M είναι το μέσον της AB, τότε επειδή AOB ισοσκελές, έχουμε OM: διχοτόμος.

(6) Κατασκευή των εφαπτομένων κύκλου από σημείο εκτός αυτού.

$|OA| > \rho$



Έστω ο κύκλος $K(\rho')$, όπου K: μέσον του OA και $\rho' = \frac{|OA|}{2}$. Ισχύει

$\rho' - \rho < |OK| = \rho' < \rho + \rho'$, οπότε οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Β και Γ. Οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ βλέπουν τη διάμετρο ΟΑ υπό ορθή γωνία, οπότε:

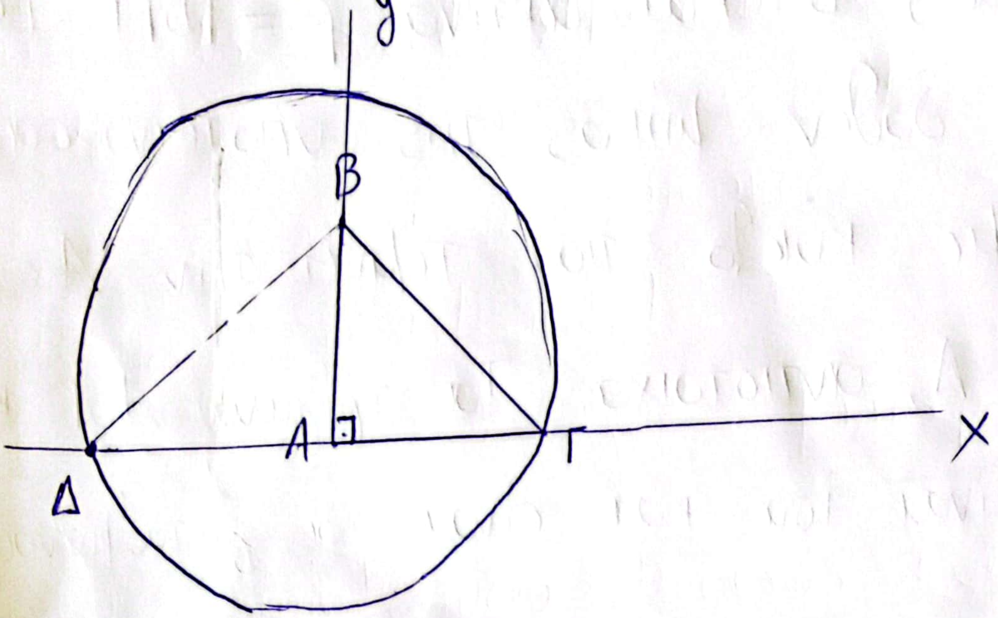
$$\left.\begin{array}{l} AB \perp OB \\ A\Gamma \perp O\Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow AB, A\Gamma: \text{εφαπτόμενες του } O(\rho).$$

<u>Παρατήρηση</u>: $|AB| = |A\Gamma|$.

<u>Πόρισμα</u>: Από σημείο Α εκτός κύκλου $O(\rho)$ υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες προς αυτόν που είναι ίσες.

Ανάλυση - Σύνθεση - Διερεύνηση

Κατασκευή 1: Κατασκευάστε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνεται μια κάθετη πλευρά και η υποτείνουσα.



Ανάλυση: Ας υποθέσουμε ότι το ζητούμενο τρίγωνο ΑΒΓ, ορθογώνιο στο Α, κατασκευάστηκε και έχει δεδομένη κάθετο ΑΒ και υποτείνουσα ΒΓ. Το Γ είναι σημείο τομής της πλευράς Οx, γωνίας $y\hat{O}x$, και κύκλου με κέντρο το Β επί της Οy και ακτίνα $\rho = |ΒΓ|$.

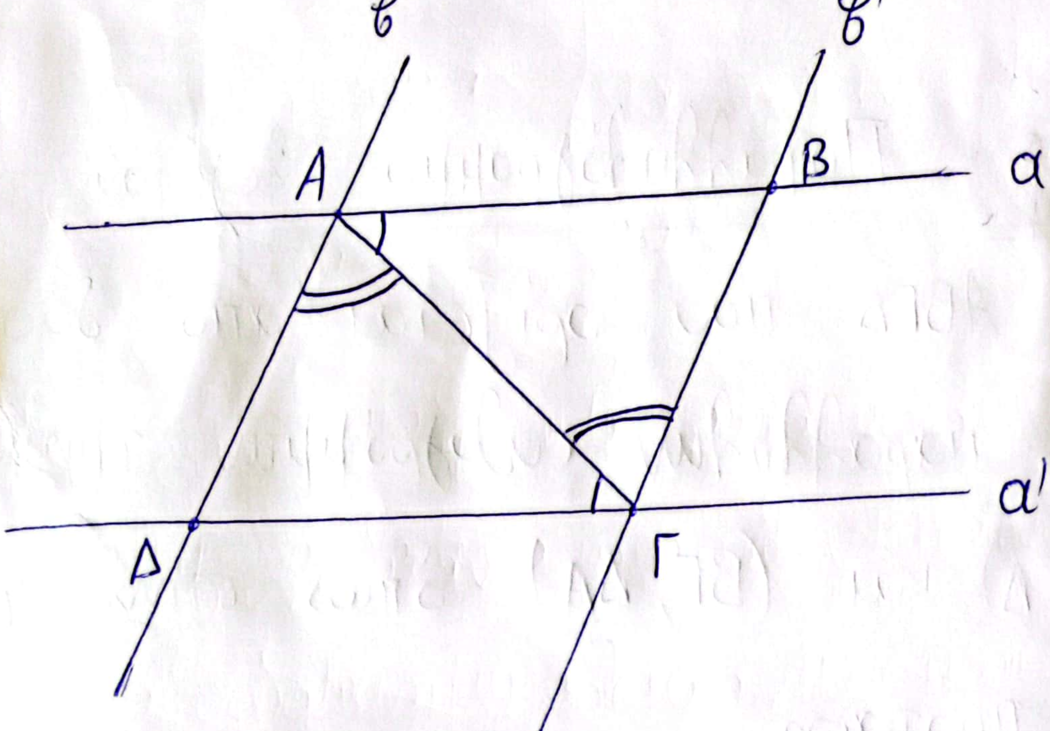
<u>Σύνθεση</u>: Πάρε $Ax \perp Ay$ και επί της Ay όρισε τμήμα AB ίσο με το δοθέν μήκος της καθέτου πλευράς. Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα $\rho = |ΒΓ|$ ίση με το δοθέν μήκος της υποτείνουσας, γράφουμε κύκλο που τέμνει την Ax στα $Γ$ και $Δ$, αντίστοιχα. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι ίσα και είναι τα ζητούμενα.

<u>Διερεύνηση</u>: Το τρίγωνο κατασκευάζεται τότε ακριβώς, όταν το δοθέν μήκος της υποτείνουσας είναι μεγαλύτερο του μήκους της καθέτου. Τότε υπάρχει μοναδική λύση.

Εξάσκηση: Άσκηση 2.4.4 - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

Πρόταση: Δύο παράλληλες ευθείες α και α' αποτέμνουν επί δύο άλλων παραλλήλων β και β' αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ που είναι ίσα.



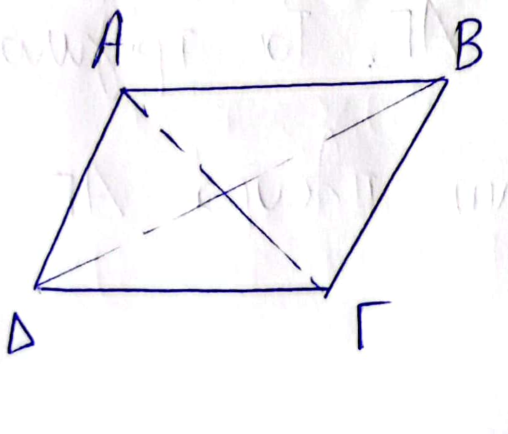
Απόδειξη: Φέραμε την ΑΓ. Τα τρίγωνα ΒΑΓ και ΔΑΓ έχουν κοινή πλευρά ΑΓ και $B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$ (εντός εναλλάξ των $AB \parallel \Gamma\Delta$ με τέμνουσα $A\Gamma$) και

$\Delta\hat{A}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$ (εντός εναλλάξ των $A\Delta \parallel B\Gamma$ με τέμνουσα $A\Gamma$).

Άρα είναι ίσα τρίγωνα και συνεπώς:

$A\Delta = B\Gamma$ και $AB = \Delta\Gamma$.

<u>Ορισμός</u>: <u>Παραλληλόγραμμο</u> λέγεται το σχήμα $AB\Gamma\Delta$ που ορίζεται από δύο ζεύγη παραλλήλων ευθυγράμμων τμημάτων $(AB, \Gamma\Delta)$ και $(B\Gamma, \Delta A)$ όπως στην προηγούμενη πρόταση.



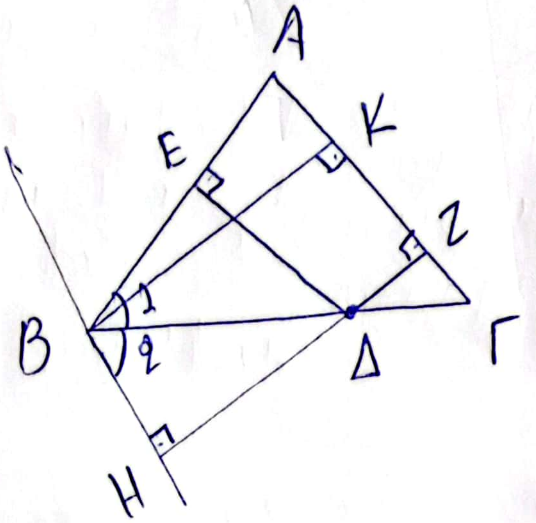
A, B, Γ, Δ: κορυφές

$AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$: πλευρές

$A\Gamma, B\Delta$: διαγώνιοι

Πόρισμα: Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται από το σημείο τομής τους.

Άσκηση: 2.5.1 - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ



Θεωρούμε $Bx // A\Gamma$ και προεκτείνουμε τη ΔΖ μέχρι να τμήσει την Bx στο H. HZ ⊥ Bx και τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΒΗΔ είναι ίσα (Γ-Π-Γ):

$\hat{E} = \hat{H} = 1L$

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

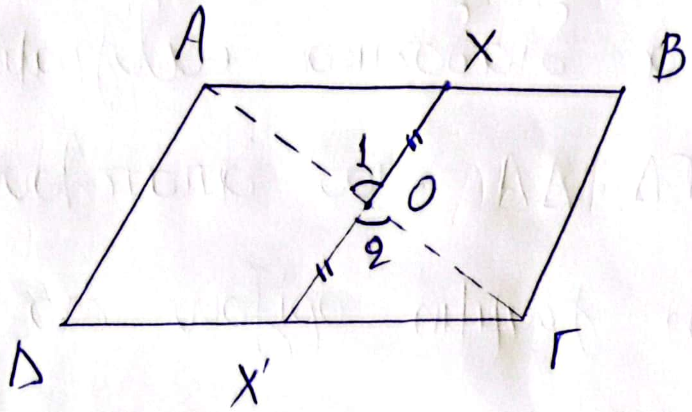
$B\Delta = B\Delta$

Άρα: $|\Delta E| + |\Delta Z| = |\Delta H| + |\Delta Z| \underset{\uparrow}{=} |BK|$

ΖΗΒΚ: παραλληλόγραμμ

<u>Άσκηση</u>: Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Χ σημείο της ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΧΟ κατά ίσο τμήμα ΟΧ'. Να δείξετε ότι το Χ' ανήκει στη ΓΔ

<u>Λύση</u>:



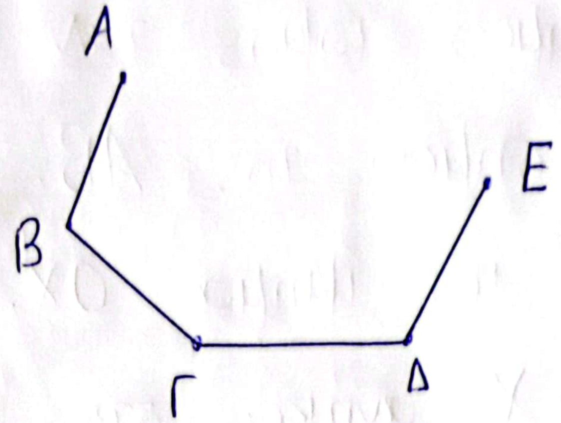
Τα τρίγωνα ΑΟΧ και Χ'ΟΓ είναι ίσα (Π-Γ-Π): $|XO| = |OX'|$, $|O\Gamma| = |OA|$ και $\hat{O_1} = \hat{O_2}$ (κατακορυφήν)

Άρα $X\hat{A}O = O\hat{\Gamma}X'$ $\Rightarrow$ Χ': επί της ΓΔ.

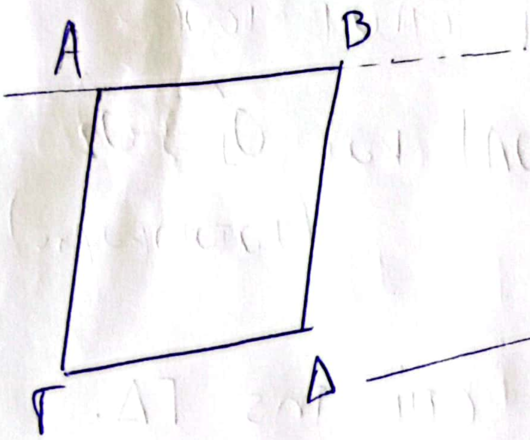
∎

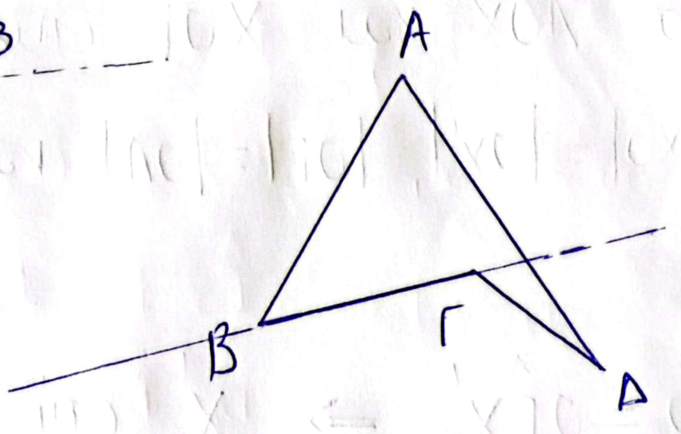
Τετράπλευρα

τεθλασμένη γραμμή



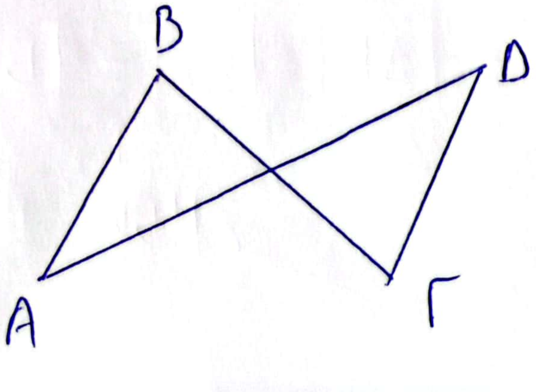
▶ Τέσσερα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ που αποτελούν μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή ορίζουν ένα τετράπλευρο.





μη κυρτό

κυρτό



αυτοτεμνόμενο

Παραλληλόγραμμο $\Longrightarrow$ τετράπλευρο
$\not\Longleftarrow$

<u>Πρόταση</u>: Ένα κυρτό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις ακόλουθες συνθήκες:

(1) οι απέναντι πλευρές του ανά δύο ίσες.

(2) δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

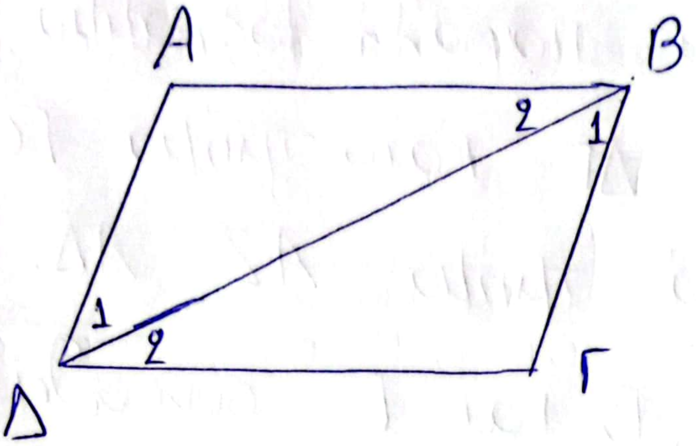
(3) οι απέναντι γωνίες ανά δύο ίσες

(4) οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ΑΒΓΔ ένα κυρτό τετράπλευρο. Θα αποδείξουμε ότι αν ισχύει η (1) τότε οι απέναντι πλευρές του ανά δύο θα είναι παράλληλες.

(1)



Υποθέτουμε ότι $|AB| = |\Gamma\Delta|$ και $|B\Gamma| = |A\Delta|$.
Θεωρούμε τη διαγώνιο ΒΔ και συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΔΓ.

Έχουν: $|AB| = |\Gamma\Delta|$, $|A\Delta| = |B\Gamma|$ και $|B\Delta| = |B\Delta|$.

Άρα είναι ίσα και συνεπώς

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 \\ \hat{\Delta}_2 = \hat{B}_2\end{array}\right\} \Longrightarrow \hat{\Delta} = \hat{B}$$ που είναι εντός εναλλάξ της τέμνουσας ΒΔ.

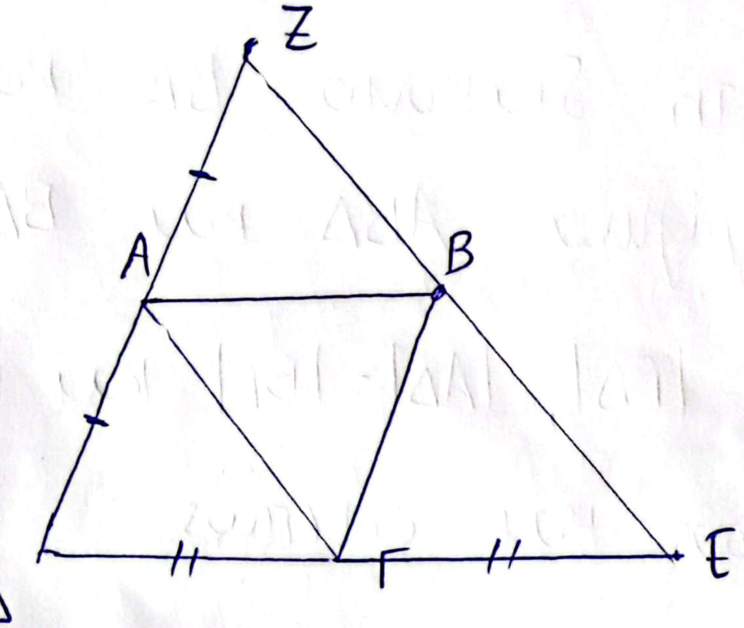
Επομένως, $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta \parallel B\Gamma$.

(2), (3), (4): H/W

■

Άσκηση: Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΑΔ. Να αποδειχθεί ότι Ζ, Β και Ε: συνευθειακά.

Λύση:



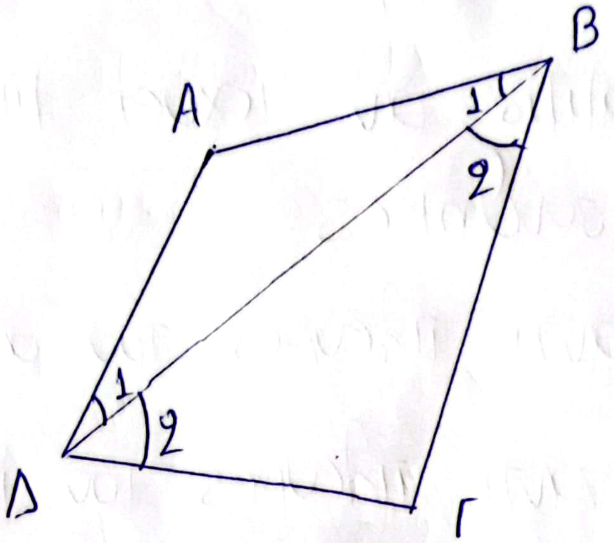
Επειδή ΑΒ// ΓΕ και |ΑΒ| = |ΔΓ| = |ΓΕ|, προκύπτει ότι ΑΒΕΓ: παραλληλόγραμμο, οπότε: ΒΕ// ΑΓ.

Εφ' όσον ΒΓ// ΑΖ και |ΒΓ| = |ΑΔ| = |ΑΖ| έχουμε ΖΒΓΑ: παραλληλόγραμμο, άρα: ΖΒ// ΑΓ.

Έτσι, ΒΕ// ΖΒ ⟹ Ζ, Β, Ε: συνευθειακά.

Πρόταση: Το άθροισμα των μέτρων των γωνιών κυρτού τετραπλεύρου είναι μια πλήρης γωνία ($360°$).

Απόδειξη:



Φέροντας την ΒΔ το τετράπλευρο χωρίζεται σε δύο τρίγωνα, τα ΑΒΔ και ΒΔΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$\left.\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B_1} + \hat{\Delta_1} &= 2L \\ \hat{\Gamma} + \hat{B_2} + \hat{\Delta_2} &= 2L \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{\Gamma} + \underbrace{\hat{B_1} + \hat{B_2}}_{\hat{B}} + \underbrace{\hat{\Delta_1} + \hat{\Delta_2}}_{\hat{\Delta}} = 360°$$

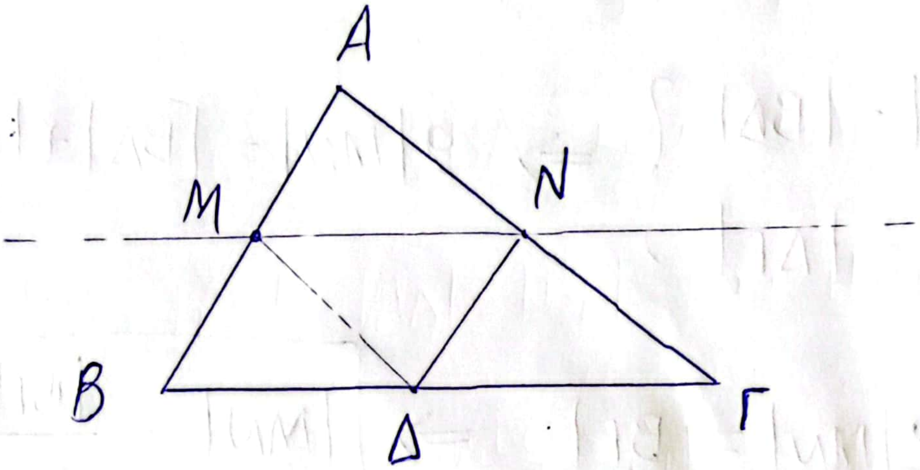
$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 360°$$

■

ΘΕΩΡΗΜΑ: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, η παράλληλος από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ προς την πλευρά ΒΓ τέμνει την τρίτη πλευρά ΑΓ στο μέσο της Ν. Επίσης,

$$|MN| = \frac{|B\Gamma|}{2}$$

Απόδειξη:



Θα αποδείξουμε ότι Ν: μέσο της ΑΓ και $|MN| = \frac{|B\Gamma|}{2}$. Έστω ΝΔ // ΑΒ.

Από κατασκευή, ΜΝΔΒ: παραλληλόγραμμο.

Ώστε, ΝΔ // ΜΒ // ΜΑ και $|N\Delta| = |MB| = |MA|$,

που σημαίνει ότι ΑΝΜΔ: παραλληλόγραμμο.

Ομοίως και το ΜΝΓΔ: παραλληλόγραμμο

Άρα: $\left.\begin{aligned} |AN| &= |M\Delta| \\ |\Gamma N| &= |M\Delta| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow |AN| = |\Gamma N|$,

άρα Ν: μέσο της ΑΓ.

Επίσης, $MN \parallel \Delta\Gamma \parallel B\Gamma$ και:

$$\left.\begin{aligned} |MN| &= |B\Delta| \\ |MN| &= |\Delta\Gamma| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 2|MN| = |B\Delta| + |\Delta\Gamma|$$

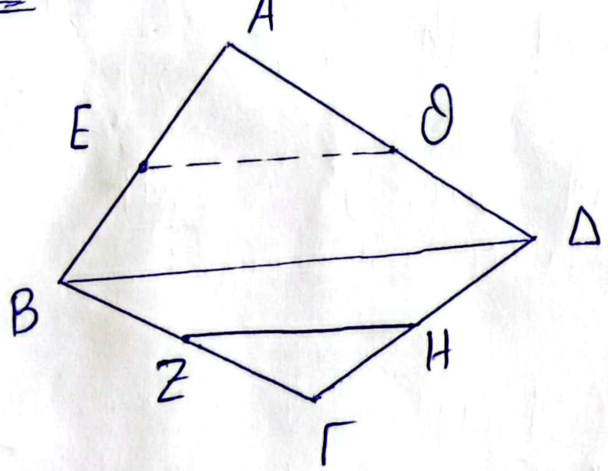
$$\Longrightarrow 2|MN| = |B\Gamma| \Longrightarrow \boxed{|MN| = \frac{|B\Gamma|}{2}}$$

∎

Πόρισμα: Το ευθύγραμμο τμήμα ΜΝ που ενώνει τα μέσα πλευρών ΑΒ και ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά ΒΓ και έχει το μισό μήκος αυτής.

Πρόταση: Τα μέσα των πλευρών παντός τετραπλεύρου σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

Απόδειξη: Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ.



Έστω Ε και Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα. Τότε ΕΘ // ΒΔ. Αντίστοιχα, ΖΗ // ΒΔ, όπου Ζ, Η τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ. Συνεπώς, ΕΘ // ΖΗ.

Επιπλέον, $|ΕΘ| = \frac{|ΒΓ|}{2} = |ΖΗ|$.

Αυτό σημαίνει ότι το ΕΘΗΖ είναι παραλληλόγραμμο, όπως θέλαμε. ∎

<u>H/W (Ευθεία του Newton)</u>

↑ Άσκηση 2.7.4 - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ