ΘΕΩΡΙΑ ΔΑΚΤΥΛΙΩΝ

<u>Ορισμός</u>: Ένας <u>προσεταιριστικός δακτύλιος</u> είναι μια τριάδα $(R,+,\cdot)$, όπου R είναι ένα μη-κενό σύνολο το οποίο είναι εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις:

$$+ : R\times R \to R, \quad (r_1, r_2) \mapsto r_1 + r_2 \quad (\text{πρόσθεση})$$

$$\cdot : R\times R \to R, \quad (r_1, r_2) \mapsto r_1 \cdot r_2 \quad (\text{πολλαπλασιασμός})$$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

1) $r_1 + (r_2 + r_3) = (r_1 + r_2) + r_3, \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in R$

2) $(\exists\, 0_R \in R)(\forall r \in R): \ r + 0_R = r = 0_R + r$

3) Για κάθε $r \in R$ υπάρχει $s \in R$ ώστε

$$r + s = 0_R = s + r$$

4) $r + s = s + r, \quad \forall r, s \in R$

5) $r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3, \quad \forall r_1, r_2, r_3 \in R$

6) $\begin{cases} r\cdot(s+t) = r\cdot s + r\cdot t \\ (r+s)\cdot t = r\cdot t + s\cdot t \end{cases}$, $\forall r,s,t \in R$

Σχόλια επί του Ορισμού : Οι ιδιότητες

1) - 4) καθιστούν το ζεύγος $(R,+)$ μια αβελιανή ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το $0_R \in R$ το οποίο θα γράφαμε πιο απλά ως 0 και για κάθε $r \in R$ συμβολίζουμε με $-r \in R$, τον αντίθετο του r, με:

$$r+(-r) = 0 = (-r)+r$$

. Το 0 θα το λέμε μηδενικό στοιχείο του R. Η ιδιότητα 5) μας λέει ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι προσεταιριστική και τέλος 6) λέγεται επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης + ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού.

Αν επιπλέον, υπάρχει στοιχείο $e \in R$ ώστε $r \cdot e = r = e \cdot r$, $\forall r \in R$ τότε το e λέγεται ουδέτερο στοιχείο του R ως προς τον πολλαπλασιασμό.

__Λήμμα:__ Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας προσεταιριστικός δακτύλιος. Τότε υπάρχει το πολύ ένα ουδέτερο στοιχείο ως προς τον πολ/μο.

__Απόδειξη:__ Έστω e και e' δύο ουδέτερα στοιχεία του R ως προς τον πολ/μο και θα δείξουμε ότι $e = e'$. Γνωρίζουμε ότι:

(i) $r \cdot e = r = e \cdot r$, $\forall r \in R$

(ii) $r \cdot e' = r = e' \cdot r$, $\forall r \in R$

Τότε:

$$e' \underset{r=e'}{\overset{(i)}{=}} e' \cdot e \underset{r=e}{\overset{(ii)}{=}} e$$, όπως θέλαμε. ∎

__Συμπέρασμα:__ Στην περίπτωση όπου ένας δακτύλιος έχει ουδέτερο στοιχείο ως προς τον πολ/μο, τότε αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $1 = 1_R$ και λέγεται μονάδα του δακτυλίου $(R, +, \cdot)$, οπότε

$r \cdot 1 = r = 1 \cdot r, \ \forall r \in R$.

▼ Το κύριο αντικείμενο μελέτης μας θα είναι οι προσεταιριστικοί δακτύλιοι με μονάδα

Σε κάθε τέτοιον δακτύλιο, χάριν απλότητας, το στοιχείο $r + (-s)$ θα το γράφουμε $r - s$ για κάθε $r, s \in R$.

. Αν $x \in R$ και $n \in \mathbb{Z}$ τότε ορίζουμε

$$nx := \begin{cases} \underbrace{x + \dots + x}_{n-\text{φορές}} & , \ n \geq 1 \\ 0_R & , \ n = 0 \\ \underbrace{(-x) + \dots + (-x)}_{-n \text{ φορές}} & , \ n < 0 \end{cases}$$

• Αν $x \in R$ και $n \in \mathbb{N}_0$ τότε ορίζουμε:

$$x^n := \begin{cases} \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-φορές}} , & n \geq 1 \\ 1_R , & n = 0 \end{cases}$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(R, +, \cdot)$ προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα. Τότε:

(α) $(n+m)x = nx + mx$ (β) $n(mx) = (nm)x$

(γ) $-(nx) = (-n)x = n(-x)$ (δ) $n(x+y) = nx + ny$

για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$ και $x, y \in R$

<u>Επιπλέον</u>: (ε) $x^{n+m} = x^n \cdot x^m$, $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$, $\forall x \in R$

(στ) $(x^n)^m = x^{nm}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$, $\forall x \in R$

(ζ) αν $x, y \in R$ με $x \cdot y = y \cdot x$ τότε

$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

<u>Απόδειξη</u>: Οι (α)-(δ) είναι συνέπεια του γεγονότος ότι $(R, +)$: ομάδα ενώ οι (ε)-(ζ) άμεση συνέπεια των ορισμών. ∎

__Πρόταση:__ Έστω $(R,+,\cdot)$: προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα. Τότε:

(1) $r\cdot 0_R = 0_R = 0_R\cdot r,\ \forall r\in R$

$(-1_R)\cdot r = -r = r\cdot(-1_R),\ \forall r\in R$

(2) $\forall r,s\in R$: $(-r)\cdot s = r\cdot(-s) = -(r\cdot s) = -rs$

$(-r)\cdot(-s) = r\cdot s$

(3) $\forall x,y,z\in R$: $x\cdot(y-z) = x\cdot y - x\cdot z$

$(x-y)\cdot z = x\cdot z - y\cdot z$

(4) Αν $\{r_i\}_{i=1}^{n}$ και $\{s_j\}_{j=1}^{m}$ είναι στοιχεία του R τότε: $(r_1+r_2+\dots+r_n)\cdot(s_1+s_2+\dots+s_m)$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} s_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_i s_j =$$

$$= r_1\cdot s_1 + r_1\cdot s_2 + \dots + r_1\cdot s_m + r_2\cdot s_1 + \dots + r_n\cdot s_m$$

(5) $n(x\cdot y) = (nx)\cdot y = x\cdot(ny),\ \forall x,y\in R,\ \forall n\in\mathbb{Z}$

(6) $(nx)\cdot(my) = (nm)(x\cdot y),\ \forall x,y\in R,\ \forall n,m\in\mathbb{Z}$

(7) $(n\cdot 1_R)\cdot x = nx,\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in R$

Απόδειξη: Αποδεικνύουμε ενδεικτικά τις (1) και (2). Οι υπόλοιπες είναι συνέπεια των ορισμών:

(1) Έστω $r \in R$. Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας και του νόμου διαγραφής στην ομάδα $(R,+)$ έχουμε: $r \cdot 0_R = r \cdot (0_R + 0_R) = r \cdot 0_R + r \cdot 0_R$, δηλαδή: $r \cdot 0_R = r \cdot 0_R + r \cdot 0_R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{r \cdot 0_R} + 0_R = r \cdot 0_R + \cancel{r \cdot 0_R} \xRightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{νόμος}} \boxed{0_R = r \cdot 0_R}.$$

Ομοίως, $0_R \cdot r = 0_R$

(2) Έστω $r, s \in R$. Με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας έχουμε:

$$r \cdot s + r \cdot (-s) = r \cdot (s + (-s)) = r \cdot 0_R = 0_R$$

$$r \cdot (-s) + r \cdot s = r \cdot ((-s) + s) = r \cdot 0_R = 0_R$$

Λόγω μοναδικότητας του αντιθέτου στην $(R,+)$ προκύπτει: $-(r \cdot s) = r \cdot (-s)$

Ομοίως για τις υπόλοιπες σχέσεις της (2).

▣

<u>Σχόλιο</u>: Αν $x,y \in R$ τότε $(x+y)^2 = (x+y)\cdot(x+y)$ $= x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y = x^2 + x\cdot y + y\cdot x + y^2$ το οποίο δεν είναι απαραίτητο ίσο με το $x^2 + 2x\cdot y + y^2$ και αυτό συμβαίνει διότι γενικά $x\cdot y \neq y\cdot x$

<u>Πρόταση</u> (Διώνυμο Νεύτωνα). Έστω $x,y \in R$ με $x\cdot y = y\cdot x$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y^k$$

<u>Ορισμός</u>: Ένας προσεταιριστικός δακτύλιος $(R,+,\cdot)$ με μονάδα λέγεται <u>μεταθετικός</u>, αν $x\cdot y = y\cdot x$, $\forall x,y \in R$.

<u>Σχόλιο</u>: Από εδώ και κάτω, όταν θα λέμε δακτύλιος θα εννοούμε προσεταιριστικός με μονάδα. Αν δεν ισχύει κάποιο από αυτά ή και τα δύο, τότε θα το αναφέρουμε ρητά. Επίσης για δύο στοιχεία

$x, y \in R$ ενός δακτυλίου R θα γράφουμε xy αντί για $x \cdot y$, όπου δεν υπάρχει σύγχυση.

Παραδείγματα Δακτυλίων

(1) Το σύνολο $R = \{0\}$ με πράξεις

$$0+0=0 \quad \text{και} \quad 0 \cdot 0 = 0$$

είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα το $1=0$ και λέγεται <u>τετριμμένος δακτύλιος</u>.

(2) Το πρωταρχικό παράδειγμα δακτυλίου είναι ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ των ακεραίων, όπου $+$ και $\cdot$ είναι οι συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού ακεραίων με μηδενικό στοιχείο το $0 \in \mathbb{Z}$ και μονάδα το $1 \in \mathbb{Z}$. Επίσης ο $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ είναι μεταθετικός αφού $nm = mn$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$.

(3) Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Η τριάδα $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ όπου + και • είναι οι συνηθισμένες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού ρητών, πραγματικών και μιγαδικών αριθμών, αντίστοιχα, είναι μεταθετικός δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο το $0 \in \mathbb{F}$ και μονάδα το $1 \in \mathbb{F}$.

Υπενθύμιση για το $\mathbb{C} = \{ x+iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$.

Για $z = x+iy \in \mathbb{C}$ και $w = u+iv \in \mathbb{C}$ είναι:

$$z+w := (x+u) + i(y+v) \in \mathbb{C}$$

$$z \cdot w := (xu - yv) + i(xv + yu) \in \mathbb{C}$$

$$0 = 0 + i0 \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{1} = 1 + i0 \in \mathbb{C}$$

$$i^2 = i \cdot i = -1 + i0$$

(4) Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ και έστω $n \in \mathbb{N}$.
Θέτουμε $R = \mathbb{M}_n(\mathbb{F}) = \left\{ [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \;\middle|\; \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{F}, \\ \forall i,j = 1, \ldots, n \end{array} \right\}$

το σύνολο των $n \times n$ - πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{F}$. Για κάθε $A = [a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ και $B = [b_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ ορίζονται οι πίνακες

$$A + B := [a_{ij} + b_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$$

$$A \cdot B := [c_{ij}]_{i,j=1}^{n}, \quad \text{όπου } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των στοιχείων του $\mathbb{F}$ διαπιστώνουμε εύκολα ότι η τριάδα $(\mathbb{M}_n(\mathbb{F}), +, \cdot)$ είναι δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο τον μηδενικό πίνακα $\mathbb{O} = [0]$, $0_{ij} = 0$ $\forall i,j$ και μονάδα τον ταυτοτικό πίνακα I_n.

Για $n \geq 2$ ο $(\mathbb{M}_n(\mathbb{F}), +, \cdot)$ δεν είναι μεταθετικός.

(5) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω η αβελιανή ομάδα $(\mathbb{Z}_n, +)$ με μηδενικό στοιχείο το $[0]_n$. Στο σύνολο $\mathbb{Z}_n$ έχουμε ορίσει και πράξη πολ/μού από τη σχέση:

$$[x]_n \cdot [y]_n = [xy]_n, \quad \forall [x]_n, [y]_n \in \mathbb{Z}_n.$$

Έχουμε αποδείξει ότι η $\cdot$ είναι προσεταιριστική, δηλαδή: $[x]_n \cdot ([y]_n \cdot [z]_n) = ([x]_n \cdot [y]_n) \cdot [z]_n$ $\forall [x]_n, [y]_n, [z]_n \in \mathbb{Z}_n$, επιπλέον είναι μεταθετική αφού $[x]_n \cdot [y]_n = [xy]_n = [yx]_n = [y]_n \cdot [x]_n$ για κάθε $[x]_n, [y]_n \in \mathbb{Z}_n$. Επιπρόσθετα το $[1]_n$ είναι μονάδα διότι $[x]_n \cdot [1]_n = [x]_n = [1]_n \cdot [x]_n$, $\forall [x]_n \in \mathbb{Z}_n$. Τέλος, $\forall [x]_n, [y]_n, [z]_n \in \mathbb{Z}_n$ ισχύει:

$$[x]_n \cdot ([y]_n + [z]_n) = [x]_n \cdot [y+z]_n = [x \cdot (y+z)]_n$$

$$= [xy+xz]_n = [xy]_n + [xz]_n = [x]_n \cdot [y]_n + [x]_n \cdot [z]_n$$

και αντίστοιχα: $([x]_n + [y]_n) \cdot [z]_n = [x]_n \cdot [z]_n + [y]_n [z]_n$

Συνεπώς, η τριάδα $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο το $[0]_n$ και μονάδα το $[1]_n$.

(6) Έστω X μη-κενό σύνολο και έστω

$$\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f: \text{συνάρτηση} \}$$

Επί του $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ ορίζονται οι πράξεις

$$+ : \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(X,\mathbb{R}), \quad (f,g) \mapsto f+g$$

$$\cdot : \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(X,\mathbb{R}), \quad (f,g) \mapsto f\cdot g$$

όπου $(f+g)(x) := f(x) + g(x), \ \forall x \in X$

↳ πρόσθεση στο $\mathbb{R}$

$(f\cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \ \forall x \in X$

↳ πολ/μος στο $\mathbb{R}$

Η τριάδα $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}), +, \cdot)$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο τη σταθερή μηδενική συνάρτηση $\mathbb{O} : X \to \mathbb{R}$, $\mathbb{O}(x) = 0$ και μονάδα τη σταθερή συνάρτηση

$$\mathbb{1} : X \to \mathbb{R} \quad \mathbb{1}(x) = 1$$

(7) (H/W): Έστω $(M,+)$ μια προσθετική αβελιανή ομάδα. Θεωρούμε το σύνολο

$$End(M) = \{ f : M \to M \mid f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x,y \in M \}$$

Προφανώς οι απεικονίσεις $0 : M \to M$, $0(x) = 0_M$ και $Id_M : M \to M$, $Id_M(x) = x$ είναι στοιχεία του $End(M)$ αφού:

- $\forall x,y \in M$: $0(x+y) = 0_M = 0_M + 0_M = 0(x) + 0(y)$
- $\forall x,y \in M$: $Id_M(x+y) = x+y = Id_M(x) + Id_M(y)$

! Αν $f, g \in End(M)$ τότε εύκολα βλέπουμε ότι οι $f+g : M \to M$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

↳ πρόσθεση της M

$$f \circ g : M \to M, \quad (f \circ g)(x) := f(g(x))$$

είναι πάλι στοιχεία του $End(M)$.

Να αποδείξετε ότι η τριάδα $(End(M), +, \cdot)$ είναι δακτύλιος στον οποίο να βρείτε το μηδενικό στοιχείο και τη μονάδα. Ο $(End(M), +, \cdot)$ λέγεται <u>δακτύλιος ενδομορφισμών της αβελιανής ομάδας $(M,+)$</u>

Ορισμός: Ένα μη-κενό υποσύνολο S ενός δακτυλίου $R=(R,+,\cdot)$ λέγεται **υποδακτύλιος** αν i) $0_R \in S$ ii) $x-y \in S$ $\forall x,y \in S$.
$xy \in S$

Η σπουδαιότητα των υποδακτυλίων στη Θεωρία Δακτυλίων δεν είναι ανάλογη με τη σπουδαιότητα των υποομάδων στη Θεωρία Ομάδων, και χρησιμεύει κυρίως στην αναγνώριση νέων δακτυλίων από παλιούς.

Σχόλια: Αν S είναι υποδακτύλιος του R τότε υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

1) Αν $1_R \in S$ τότε ο S έχει μονάδα το 1_R. Πράγματι, επειδή $1_R \in S$ και $s\cdot 1_R = s = 1_R \cdot s$, $\forall s \in S$ προκύπτει ότι

$$1_S = 1_R.$$

(2) Ο υποδακτύλιος S έχει μονάδα 1_S αλλά $1_S \neq 1_R$.

(3) Ο υποδακτύλιος S δεν έχει μονάδα.

Επιπλέον, αν ο R είναι μεταθετικός τότε και ο S είναι μεταθετικός. Το αντίστροφο δεν ισχύει (βλέπε παρακάτω).

Παραδείγματα

(A) Σε κάθε προσεταιριστικό δακτύλιο με μονάδα, $R = (R, +, \cdot)$, τα υποσύνολα $S_0 = \{0\}$ και $S = R$ είναι υποδακτύλιοι του R. Ο S_0 δεν έχει μονάδα ενώ ο S έχει.

(B) Στις εγκλείσεις $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ κάθε δακτύλιος είναι υποδακτύλιος του επομένου.

Ⓖ Τα υποσύνολα

$$\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z} \} \subseteq \mathbb{C}$$

$$\mathbb{Q}[i] = \{ x + yi \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Q} \} \subseteq \mathbb{C}$$

είναι υποδακτύλιοι του $\mathbb{C}$ που περιέχουν τη μονάδα $1 = 1 + 0i$

Απόδειξη για $\mathbb{Z}[i]$: Προφανώς $0 = 0 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$.

Αν $x = a + bi$, $y = c + di \in \mathbb{Z}[i]$ τότε $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

και: $x - y = \underbrace{(a-c)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b-d)}_{\in \mathbb{Z}} i \in \mathbb{Z}[i]$

$$x \cdot y = \underbrace{(ac - bd)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{Z}} i \in \mathbb{Z}[i]$$

Επιπλέον: $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z}[i]$.

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και για το $\mathbb{Q}[i]$. ∎

H/W: Να δείξετε ότι το $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{R}$ που περιέχει τη μονάδα 1.

Δ Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$ και έστω $X=[a,b]$.

Από το Παράδειγμα (6) στους δακτυλίους, το $(\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R}),+,\cdot)$ είναι δακτύλιος μεταθετικός με μηδενικό στοιχείο τη μηδενική απεικόνιση $\mathbb{0}: [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathbb{0}(x)=0$ και μονάδα τη σταθερή συνάρτηση

$$\mathbb{1}: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}(x)=1$$

Έστω $S = C([a,b],\mathbb{R}) = \{ f: [a,b] \to \mathbb{R} \mid f: \text{ συνεχής συνάρτηση} \}$

$$\subseteq \mathcal{F}([a,b]).$$

Η μηδενική συνάρτηση $\mathbb{0}$ είναι συνεχής ως σταθερή, άρα $\mathbb{0} \in C([a,b])$. Επίσης, από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι αν $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ τότε $f-g,\ fg \in C([a,b])$, δηλαδή: διαφορά και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Άρα ο $C([a,b],\mathbb{R})$ είναι υποδακτύλιος του $F([a,b],\mathbb{R})$ που περιέχει επίσης τη μονάδα διότι η σταθερή συνάρτηση 1 είναι συνεχής στο $[a,b]$.

(E) Έστω ο δακτύλιος $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ των ακεραίων αριθμών, έστω $n\in\mathbb{N}_0$ και έστω $S = n\mathbb{Z} := \{n\kappa\in\mathbb{Z} \mid \kappa\in\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$.

Επειδή $0 = n\cdot 0$ έπεται $0\in S$. Έστω τώρα $x,y\in S$ και θα αποδείξουμε ότι $x-y\in S$ και $xy\in S$. Πράγματι, αφού $x,y\in S$, υπάρχουν $\kappa,\lambda\in\mathbb{Z}$ με $x = n\kappa$, $y = n\lambda$

οπότε:
$$x-y = n\kappa - n\lambda = n(\kappa-\lambda)\in n\mathbb{Z} = S$$
$$xy = n\kappa\cdot n\lambda = n(\kappa n\lambda)\in n\mathbb{Z} = S$$

Άρα ο S είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}$.

· Αν $n=0$ ή $n=1$ τότε $S=\{0\}$ ή $S=\mathbb{Z}$. Αν $n\geq 2$ τότε ο $S=n\mathbb{Z}$ δεν περιέχει τη μονάδα 1 διότι δεν υπάρχει $\kappa\in\mathbb{Z}$ ώστε $1=n\kappa$

. Επιπλέον, ο $S=n\mathbb{Z}$ για $n\geq 2$ <u>δεν έχει μονάδα</u> $1_S\in S$. Πράγματι, αν είχε $1_S\in S$ τότε $1_S=n\lambda_0$ για κάποιο $\lambda_0\in\mathbb{Z}^*$. Έτσι: $n\kappa\cdot n\lambda_0 = n\kappa = n\lambda_0\cdot n\kappa$, $\forall \kappa\in\mathbb{Z}$. Ιδιαίτερα, για $\kappa=1$: $n^2\lambda_0 = n \Rightarrow n\lambda_0=1$, άτοπο.

<u>Συμπέρασμα</u>: Για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$, ο $S_n=n\mathbb{Z}$ είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}$ και μόνο ο $S_1=\mathbb{Z}$ περιέχει μονάδα. Αντίστροφα, αν S είναι υποδακτύλιος του $\mathbb{Z}$ τότε $S\leq(\mathbb{Z},+)$. Επειδή η $(\mathbb{Z},+)$ είναι άπειρη κυκλική, από Β φυλλάδιο

Ασκήσεων και συγκεκριμμένα από την Άσκηση Β1, έπεται ότι $S = n\mathbb{Z}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$. Άρα, οι μόνοι υποδακτύλιοι του $\mathbb{Z}$ είναι οι $S_n = n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

ΣΤ Έστω ο δακτύλιος $R = \mathbb{M}_2(\mathbb{Q})$ και έστω $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R \;\middle|\; x \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq R$. Τότε:

$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$ (αφού $0 \in \mathbb{Q}$). Έστω $X, Y \in S$.

Τότε $X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $Y = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ με $x, y \in \mathbb{Q}$.

Έχουμε: $X - Y = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$

(διότι $x - y \in \mathbb{Q}$) και επιπλέον:

$XY = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$ ($xy \in \mathbb{Q}$).

Ώστε, ο S είναι υποδακτύλιος του R.

Όμως, ο S δεν περιέχει τη μονάδα

του R, δηλαδή το μοναδιαίο πίνακα

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Αντί αυτού, υπάρχει το στοιχείο $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$

ώστε για κάθε $X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$ να έχουμε:

$$XE = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = X = EX.$$

Άρα, ο S είναι υποδακτύλιος του R

με μονάδα $1_S = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2 = 1_R$.

Επίσης, ο S είναι μεταθετικός διότι

για κάθε $X = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$ ισχύει

$$XY = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= YX$$

ενώ ο $R = M_2(\mathbb{R})$ δεν είναι διότι για

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in R$ έχουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = BA.$$

(Z) Ο Δακτύλιος των Τετρανίων του Hamilton

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$$

<u>υπενθύμιση</u>: αν $a = x + yi \in \mathbb{C}$ με $x, y \in \mathbb{R}$ τότε $\bar{a} = x - yi \in \mathbb{C}$. Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύουν τα εξής:

- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$ • $\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$
- $\overline{(\bar{z})} = z$.

Με χρήση αυτών των ιδιοτήτων θα αποδείξουμε ότι ο $\mathbb{H}$ είναι μη-μεταθετικός υποδακτύλιος του $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ με μονάδα

$$1_{\mathbb{H}} = I_2 = 1_{\mathbb{M}_2(\mathbb{C})}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: $0 = 0 + 0i \Rightarrow \bar{0} = 0 - 0i = 0$

$1 = 1 + 0i \Rightarrow \bar{1} = 1 - 0i = 1$

Γενικότερα, για $z = x + yi \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$z = \bar{z} \iff y = 0.$$

• $\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$.

• Έστω $X = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} c & d \\ -\bar{d} & \bar{c} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$. Τότε:

$$X - Y = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ -\bar{b}+\bar{d} & \bar{a}-\bar{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ -\overline{(b-d)} & \overline{a-c} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$$

$$XY = \begin{bmatrix} ac-b\bar{d} & ad+b\bar{c} \\ -\bar{b}c-\bar{a}\bar{d} & -\bar{b}d+\bar{a}\bar{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-b\bar{d} & ad+b\bar{c} \\ -(\bar{a}\bar{d}+\bar{b}\bar{c}) & \bar{a}\bar{c}-\bar{b}\bar{\bar{d}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ac-b\bar{d} & ad+b\bar{c} \\ -\overline{(ad+b\bar{c})} & \overline{ac-b\bar{d}} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}.$$

Άρα, ο $\mathbb{H}$ είναι υποδακτύλιος του $M_2(\mathbb{C})$.

Επιπλέον, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$.

Τέλος, ο $\mathbb{H}$ όχι μεταθετικός διότι για τα στοιχεία του $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{H}$ ισχύει: $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = BA$.

Κατασκευές Δακτυλίων

(Ι) Έστω $(R, +, \cdot)$ προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα. Αν $(S_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια υποδακτυλίων του R τότε και ο $S = \bigcap_{i\in I} S_i$ είναι υποδακτύλιος του R.

Απόδειξη: Επειδή $0_R \in S_i$, $\forall i \in I$ (διότι S_i: υποδακτύλιος, $\forall i\in I$) έπεται $0_R \in \bigcap_{i\in I} S_i = S$.

Έστω $x, y \in S = \bigcap_{i\in I} S_i$. Τότε $x, y \in S_i$, $\forall i \in I$ και επειδή S_i: υποδακτύλιος του R, $\forall i\in I$, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x-y \in S_i, \ \forall i\in I \\ xy \in S_i, \ \forall i \in I \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x-y \in \bigcap_{i\in I} S_i = S \\ xy \in \bigcap_{i\in I} S_i = S. \end{array}$$

Άρα, S: υποδακτύλιος του R. ■

H/W: Έστω $(R, +, \cdot)$ δακτύλιος με μονάδα $1 = 1_R$. Να δείξετε ότι το υποσύνολο $S = \{ n 1_R \in R \mid n \in \mathbb{Z} \}$ είναι υποδακτύλιος του R που περιέχει το 1_R.

(II) <u>Δακτύλιοι Πινάκων</u>: Έστω $(R,+,\cdot)$ ένας προσεταιριστικός δακτύλιος και έστω $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{M}_n(R)$ όλων των $n\times n$ - πινάκων με στοιχεία από το R, δηλαδή

$$\mathbb{M}_n(R)=\left\{ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \;\middle|\; a_{ij}\in R,\ \forall i,j=1,\dots,n \right\}$$

Συνήθως, ένας πίνακας A, $n\times n$ του $\mathbb{M}_n(R)$ γράφεται πιο σύντομα ως $A=(a_{ij})$.

Δύο στοιχεία $A=(a_{ij})$ και $B=(b_{ij})$ του $\mathbb{M}_n(R)$ είναι <u>ίσα</u> και γράφουμε $A=B$ αν $a_{ij}=b_{ij}$, $\forall i,j=1,\dots,n$.

Στο σύνολο $\mathbb{M}_n(R)$ ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού ως εξής:

Αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ τότε:

$$A+B := (c_{ij}), \text{ όπου } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ 1 \leq i,j \leq n$$

$$AB := (d_{ij}), \text{ όπου } d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \ 1 \leq i,j \leq n$$

Τότε το ζεύγος $(\mathbb{M}_n(R), +)$ είναι αβελιανή ομάδα με μηδενικό στοιχείο τον πίνακα

$$\mathbb{0} = \begin{bmatrix} 0_R & 0_R & \cdots & 0_R \\ \vdots & & & \\ 0_R & 0_R & \cdots & 0_R \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(R)$$

και για κάθε $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ έχουμε $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$.

Επιπλέον, η πράξη του πολ/μου πινάκων είναι προσεταιριστική και εύκολα προκύπτει ότι

$$\left.\begin{aligned} A(B+C) &= AB + AC \\ (A+B)C &= AC + BC \end{aligned}\right\}, \ \forall A, B, C \in \mathbb{M}_n(R)$$

Άρα, η τριάδα $(\mathbb{M}_n(R), +, \cdot)$ είναι προσεταιριστικός δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο τον μηδενικό πίνακα.

Αν επιπλέον ο R έχει μονάδα 1_R τότε και ο $\mathbb{M}_n(R)$ έχει μονάδα τον μοναδιαίο πίνακα

$$I_n = \begin{bmatrix} 1_R & 0_R & \cdots & 0_R \\ 0_R & 1_R & 0_R \cdots & 0_R \\ & & \ddots & \\ 0_R & 0_R & \cdots & 1_R \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(R).$$

Εν γένει, ο $\mathbb{M}_n(R)$ δεν είναι μεταθετικός.

<u>Εφαρμογή</u>: $n = 2$, $R = \mathbb{Z}_2$

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} [0]_2, & [0]_2 \\ [0]_2, & [0]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [1]_2, & [0]_2 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\begin{bmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [0]_2, & [0]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [0]_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{bmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{bmatrix} \right\}$$

- $$\begin{bmatrix} [0]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0]_2+[1]_2 & [1]_2+[1]_2 \\ [0]_2+[1]_2 & [0]_2+[1]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [0]_2 & [0]_2 \\ [1]_2 & [1]_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [1]_2\cdot[0]_2+[1]_2\cdot[1]_2 & [1]_2\cdot[0]_2+[1]_2\cdot[1]_2 \\ [0]_2\cdot[0]_2+[0]_2\cdot[1]_2 & [0]_2\cdot[0]_2+[0]_2\cdot[1]_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [0]_2+[1]_2 & [0]_2+[1]_2 \\ [0]_2+[0]_2 & [0]_2+[0]_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1]_2 & [1]_2 \\ [0]_2 & [0]_2 \end{bmatrix}$$

(III) <u>Ευθύ Γινόμενο Δακτυλίων</u>

Έστω $R=(R,+,\cdot)$ και $S=(S,\oplus,*)$ δύο προσεταιριστικοί δακτύλιοι με μονάδες 1_R και 1_S, αντίστοιχα. Στο καρτεσιανό γινόμενο $R\times S=\{(r,s) \mid r\in R,\ s\in S\}\neq\emptyset$

ορίζουμε πράξεις πρόσθεσης και πολ/μού ως ακολούθως:

$+' : (R\times S)\times(R\times S) \to (R\times S),\ (r_1, s_1) +' (r_2, s_2) := (r_1 + r_2, s_1 \oplus s_2)$

$\cdot' : (R\times S)\times(R\times S) \to (R\times S),\ (r_1, s_1) \cdot' (r_2, s_2) := (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2)$

Από τη θεωρία ομάδων γνωρίζουμε ότι το ζεύγος $(R\times S, +')$ είναι αβελιανή (διότι $(R,+)$ και $(S,+)$ είναι αβελιανές ομάδες) με μηδενικό στοιχείο το $0 = (0_R, 0_S) \in R\times S$ και για κάθε $(r,s) \in R\times S$ έχουμε $-(r,s) = (-r, -s)$.

Για κάθε $(r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3) \in R\times S$ ισχύει:

$(r_1, s_1) \cdot' \big((r_2, s_2) \cdot' (r_3, s_3)\big) = (r_1, s_1) \cdot' (r_2 \cdot r_3, s_2 * s_3) =$

$= \big(r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3), s_1 * (s_2 * s_3)\big) = \big((r_1 \cdot r_2) \cdot r_3, (s_1 * s_2) * s_3\big) =$

$= (r_1 \cdot r_2, s_1 * s_2) \cdot' (r_3, s_3) = \big((r_1, s_1) \cdot' (r_2, s_2)\big) \cdot' (r_3, s_3)$

δηλαδή η πράξη $\cdot'$ είναι προσεταιριστική.

Επίσης, $(r_1, s_1)\cdot'\big((r_2, s_2)+'(r_3, s_3)\big) =$

$$= (r_1, s_1)\cdot'(r_2+r_3,\ s_2 \oplus s_3) = \big(r_1\cdot(r_2+r_3),\ s_1 * (s_2 \oplus s_3)\big)$$

$$= (r_1\cdot r_2 + r_1\cdot r_3,\ s_1 * s_2 \oplus s_1 * s_3) =$$

$$= (r_1\cdot r_2,\ s_1 * s_2) +' (r_1\cdot r_3,\ s_1 * s_3) =$$

$$= (r_1, s_1)\cdot'(r_2, s_2) +' (r_1, s_1)\cdot'(r_3, s_3)$$

Αντίστοιχα: $\big((r_1, s_1)+'(r_2, s_2)\big)\cdot'(r_3, s_3) =$

$$(r_1, s_1)\cdot'(r_3, s_3) +' (r_1, s_1)\cdot'(r_3, s_3)$$

Τέλος, για το $1 = (1_R, 1_S) \in R\times S$ έχουμε:

$$(r, s)\cdot' 1 = (r, s)\cdot'(1_R, 1_S) = (r\cdot 1_R,\ s * 1_S) = (r, s)$$

$$1\cdot'(r, s) = (1_R, 1_S)\cdot'(r, s) = (1_R\cdot r,\ 1_S * s) = (r, s)$$

$$\forall (r, s) \in R\times S.$$

Ώστε, η τριάδα $(R\times S, +', \cdot')$ είναι προσεταιριστικός δακτύλιος με μηδενικό στοιχείο $0 = (0_R, 0_S)$ και μονάδα $1 = (1_R, 1_S)$

Ισχύει: $R \times S$: μεταθετικός $\Longleftrightarrow$ R, S: μεταθετικοί.

Από εδώ και στο εξής, όταν θα έχουμε ευθύ γινόμενο $R \times S$ θα συμβολίζουμε με $+$ και $\cdot$ όλες τις πράξεις και στο $R \times S$ και στο R και στο S για ευκολία στους υπολογισμούς.

Αντίστοιχα ορίζεται ο δακτύλιος $R = R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$, όπου R_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι δακτύλιοι και $n \geq 3$.

(IV) Το Κέντρο ενός δακτυλίου

Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα 1_R. Το κέντρο του R ορίζεται να είναι το ακόλουθο υποσύνολο

$$Z(R) = \{x \in R \mid rx = xr, \ \forall r \in R\} \subseteq R.$$

Επειδή $r \cdot 0_R = 0_R = 0_R \cdot r$, $\forall r \in R$, έπεται $0_R \in Z(R)$.
Επιπλέον, $r \cdot 1_R = r = 1_R \cdot r$, $\forall r \in R$ και άρα
$1_R \in Z(R)$. Έστω τώρα $x, y \in Z(R)$. Τότε:

$$\begin{cases} xr = rx, \ \forall r \in R \ (1) \\ ys = sy, \ \forall s \in R \ (2) \end{cases}$$

Έτσι, για κάθε $a \in R$ έχουμε:

$$(x-y) \cdot a = xa - ya \overset{(1), r=a}{\underset{(2), s=a}{=\!=\!=}} ax - ay = a(x-y)$$

$$(xy)a = x(ya) \overset{(2)}{\underset{s=a}{=\!=}} x(ay) = (xa)y \overset{(1)}{\underset{r=a}{=\!=}} (ax)y = a(xy)$$

Συνεπώς, το κέντρο $Z(R)$ είναι υποδακτύλιος του R που περιέχει το 1_R. Προφανώς, ο $Z(R)$ είναι μεταθετικός και ισχύει ότι: R: μεταθετικός $\Longleftrightarrow R = Z(R)$. ∎

▼ Έστω $R=(R,+,\cdot)$ ένας προσεταιριστικός δακτύλιος με μονάδα 1_R. Ένα στοιχείο $r\in R$, $r\neq 0_R$, λέγεται <u>αριστερός</u> (αντ. δεξιός) <u>διαιρέτης του μηδενός</u> αν υπάρχει $s\in R, s\neq 0_R$ ώστε $rs=0_R$ (αντ. $sr=0_R$). Ένα στοιχείο του r καλείται <u>διαιρέτης του μηδενός</u> αν είναι και αριστερός και δεξιός διαιρέτης του μηδενός. Προφανώς, αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός τότε δε χρειάζεται να κάνουμε διάκριση μεταξύ αριστερών και δεξιών διαιρετών του μηδενός.

<u>πχ</u>: Στον δακτύλιο $R=\mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$, αν $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\in R$ έχουμε:

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{O}$, οπότε A: αριστερός διαιρέτης του μηδενός και αντίστοιχα ο B είναι δεξιός διαιρέτης του μηδενός.

<u>Ορισμός</u>: Ένας δακτύλιος R καλείται <u>περιοχή</u> ή <u>δακτύλιος χωρίς διαιρέτες του μηδενός</u> αν: $\forall r, s \in R: \; rs = 0 \Rightarrow r = 0$ ή $s = 0$

Δηλαδή ο R είναι περιοχή αν δεν έχει δεξιούς ή αριστερούς διαιρέτες του μηδενός.

- Αν ο δακτύλιος R είναι μεταθετικός με μονάδα και επιπλέον είναι περιοχή, τότε λέγεται <u>ακέραια περιοχή</u>.