Ασκήσεις

i) $G_1 \times G_2$ αβελιανή $\Leftrightarrow$ G_1, G_2 αβελιανές

ii) $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$

Λύση

i) $\Rightarrow$ Έστω $G_1 \times G_2$ αβελιανή και θδο G_1, G_2 αβελιανές

Έστω $a, b \in G_1$ και $c, d \in G_2$. Τότε

$(a, e_2), (b, e_2) \in G_1 \times G_2$ και αφού η $G_1 \times G_2$ αβελιανή

θα έχω $(a, e_2)(b, e_2) = (b, e_2)(a, e_2)$

$(a \cdot b, e_2 * e_2) = (b \cdot a, e_2 * e_2) \Rightarrow (ab, e_2) = (ba, e_2)$

$\Rightarrow a b = b \cdot a$

Ομοίως, για τα $(e_1, c), (e_1, d) \in G_1 \times G_2$

.... $c * d = d * c$

Άρα G_1, G_2 αβελιανές.

$\Leftarrow$ Υποθέτω G_1, G_2 αβελιανές. Τότε για κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_1 \times G_2$ ισχύει $(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 * y_2) =$

$= (x_2 \cdot x_1, y_2 * y_1) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1)$

που σημαίνει G αβελιανή.

ii) $Z(\tilde{G}) = \{ x \in \tilde{G} \mid xy = y \cdot x \quad \forall y \in \tilde{G} \}$

Για κάθε $(x, y) \in G = G_1 \times G_2$ ισχύει:

$(x, y) \in Z(G_1 \times G_2) \Leftrightarrow (x, y) \cdot (z, w) = (z, w)(x, y)$

$\forall (z, w) \in G_1 \times G_2$

$\Leftrightarrow (x \cdot z, y * w) = (z x, w * y), \forall z \in G_1, \forall w \in G_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot z = z \cdot x, & \forall z \in G_1 \\ y * w = w * y, & \forall w \in G_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x \in Z(G_1) \\ \text{και} \\ y \in Z(G_2) \end{array} \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow (x,y) \in Z(G_1) \times Z(G_2)$.

Συμπέρασμα: Οι ομάδες $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, +)$ για $n, m \in \mathbb{N}$ είναι αβελιανές τάξης $|\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m| = n \cdot m$

Αντίθετα, για $n, m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 3$ οι ομάδες $(\mathbb{Z}_m \times S_m, *)$ δεν είναι αβελιανές διότι $(S_m, \circ)$ όχι αβελιανή.

S_m αβελιανή μόνο αν $m = 1, 2$. $\leftarrow$

π.χ $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, +)$

- $([1]_3, [1]_5) + ([0]_3, [4]_5) = ([1]_3, [0]_5)$
- $3([2]_3, [2]_5) = ([2]_3, [2]_5) + ([2]_3, [2]_5) +$
  $+ ([2]_3, [2]_5) = ([0]_3, [1]_5)$
- $([1]_3, [3]_5) + ([1]_3, [4]_5) = ([2]_3, [2]_5)$

π.χ

$\mathbb{Z}_2 \times S_3$

$([1]_2, \sigma)$, $([0]_2, \tau)$ όπου $\sigma(1\,2)$ $\tau = (1\,3)$

$([1]_2, \sigma) \cdot ([0]_2, \tau) = ([1]_2 + [0]_2, \sigma \circ \tau)$ $*$

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma \circ \tau)(1) &= \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 3 \\
(\sigma \circ \tau)(2) &= \sigma(\tau(2)) = \sigma(2) = 1 \\
(\sigma \circ \tau)(3) &= \sigma(\tau(3)) = 2
\end{aligned}\right\} \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\,3\,2)$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Άρα $\circledast \left([1]_2, \quad (1\,3\,2) \right)$