$\tau = (1\ 2\ 7) \circ (3\ 4\ 5) \circ (6\ 10) \circ (1\ 7)$

$= (1\ 7) \circ (1\ 2) \circ (3\ 5) \circ (3\ 4) \circ (6\ 10) \circ (1\ 7)$

$= (1\ 7) \circ (1\ 2) \circ (3\ 5) \circ (3\ 4) \circ (6\ 10)$

τ: περιττή

(ii) Κάθε κύκλος $\gamma = (a_1\ a_2 \dots a_k) \in S_n$, $n \geq 2$, $k \geq 2$ είναι άρτια (αντ. περιττή) αν k: περιττό (αντ. άρτιο)

(iii) $\forall n \geq 2$, $Id_n = (1\ 2) \circ (2\ 1) \leftarrow$ άρτια

Πρόταση

Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Το υποσύνολο

$$A_n = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma: \text{άρτια μετάθεση} \} \subseteq S_n$$

είναι υποομάδα της $(S_n, \circ)$.

Απόδειξη

Ισχύει: $Id_n = (1\ 2) \circ (2\ 1) \in A_n$

Έστω $\sigma = \underbrace{(a_1\ a_2) \circ (b_1\ b_2) \circ \ldots \circ (f_1,\ f_2)}_{\text{άρτιο πλήθος}} \in A_n$

Τότε $\sigma^{-1} = (f_1\ f_2)^{-1} \circ \ldots \circ (b_1\ b_2)^{-1} \circ (a_1\ a_2)^{-1}$

$= \underbrace{(f_2\ f_1) \circ \ldots \circ (b_2\ b_1) \circ (a_2\ a_1)}_{\text{άρτιο πλήθος}} \in A_n$

Τέλος, αν $\sigma, \tau \in A_n$ τότε $\tau^{-1} \in A_n$ και

αν : σ: σύνθεση 2κ αντιμεταθέσεων

τ^{-1}: —//— 2λ —//— ———

τότε $\sigma \circ \tau^{-1}$: σύνθεση $2\kappa + 2\lambda = 2(\kappa+\lambda)$: αντιμεταθ.

οπότε $\sigma \circ \tau^{-1} \in A_n$.

Τελικά, $A_n \leq S_n$ ∎

Ορισμός: Η υποομάδα A_n της $(S_n, \circ)$ η οποία αποτελείται από τις άρτιες μεταθέσεις της S_n λέγεται η **εναλλάσσουσα υποομάδα της S_n**.

Πρόσημο: $\varepsilon : S_n \to \{-1, 1\}$

$$\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma : \text{άρτια} \\ -1, & \sigma : \text{περιττή} \end{cases}$$

Παρατήρηση: σ, τ: άρτιες $\Rightarrow$ $\sigma\circ\tau$: άρτια

σ, τ: περιττές $\Rightarrow$ $\sigma\circ\tau$: άρτια

σ: άρτια, τ: περιττή $\Rightarrow$ $\sigma\circ\tau$: περιττή

Εύκολα: $\varepsilon(\sigma\circ\tau) = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\tau), \ \forall \sigma, \tau \in S_n$

$\varepsilon(\sigma^{-1}) = (\varepsilon(\sigma))^{-1}$

Περιγραφή: $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}$

Πρόταση: Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Τότε $|A_n| = \frac{n!}{2}$

Απόδειξη: Κάθε μετάθεση της S_n είναι είτε άρτια είτε περιττή αλλά όχι και τα δύο, άρα $S_n = \underbrace{A_n \cup (S_n \setminus A_n)}_{\text{ξένη ένωση}}$

Έστω $\mu = (1\ 2) \in S_n \setminus A_n$. Τότε $\mu^{-1} = \mu$ και ορίζουμε μέσω της μ την απεικόνιση $f: A_n \to S_n \setminus A_n$ με $f(\sigma) = \mu \circ \sigma$. Η f είναι καλά ορισμένη διότι αν $\sigma \in A_n$, τότε $f(\sigma) = \mu \circ \sigma \in S_n \setminus A_n$ (περιττή $\circ$ άρτια $=$ περιττή).

• **f: 1-1** : Για κάθε $\sigma, \tau \in A_n$ έχουμε:

$f(\sigma) = f(\tau) \Rightarrow \mu \circ \sigma = \mu \circ \tau \Rightarrow \mu^{-1} \circ \mu \circ \sigma = \mu^{-1} \circ \mu \circ \tau$
$\Rightarrow Id_n \circ \sigma = Id_n \circ \tau \Rightarrow \sigma = \tau$

• **f επί** : Έστω $\rho \in S_n \setminus A_n$. Αναζητώ $\sigma \in A_n$ ώστε $f(\sigma) = \rho$, δηλαδή $\mu \circ \sigma = \rho$.

Θέτω $\sigma = \mu^{-1} \circ \rho$ η οποία ανήκει στην

A_n ως γινόμενο δύο περιττών μεταθέσεων

και πράγματι: $f(\sigma) = f(\mu^{-1} \circ \rho) = \mu \circ \mu^{-1} \circ \rho = Id_n \circ \rho = \rho$.

Εφ' όσον f: 1-1 και επί, έχουμε: $|A_n| = |S_n \setminus A_n|$.

Τότε: $|S_n| = |A_n \cup (S_n \setminus A_n)| = |A_n| + |S_n \setminus A_n| = 2|A_n|$

$\Rightarrow 2|A_n| = n! \Rightarrow \boxed{|A_n| = \frac{n!}{2}}$

Εύρεση A_n για $n = 1, 2, 3, 4$

- $\underline{\underline{n=1}}$: $S_1 = \{Id\} = A_1$

- $\underline{\underline{n=2}}$: $S_2 = \{\underset{\text{άρτια}}{Id}, \underset{\text{περιττή}}{\sigma}\}$, όπου $\sigma = (1\ 2)$

άρα $A_2 = \{Id\}$

- $\underline{\underline{n=3}}$: $S_3 = \left\{ \begin{matrix} Id, (1\ 2), (1\ 3) \\ (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \end{matrix} \right\}$

. Οι $(1\ 2)$, $(1\ 3)$ και $(2\ 3)$ είναι περιττές

ενώ οι $(1\ 2\ 3) = (1\ 3) \circ (1\ 2)$ και

$(1\ 3\ 2) = (1\ 2)\circ(1\ 3)$ είναι άρτιες.

Συνεπώς, $A_3 = \{ Id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2) \}$

• $\underline{\underline{n=4}}$: $|S_4| = 4! = 24$, $|A_4| = 12$

$$A_4 = \left\{ \begin{matrix} Id, (1\ 2\ 3), (1\ 2\ 4), (1\ 3\ 4), (2\ 3\ 4), \\ (1\ 3\ 2), (1\ 4\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 4\ 3), \\ (1\ 2)\circ(3\ 4), (1\ 3)\circ(2, 4), (1\ 4)\circ(2\ 3) \end{matrix} \right\}$$

Πρόταση

$\forall \rho \in S_n, \forall \sigma \in A_n, \rho\circ\sigma\circ\rho^{-1} \in A_n$

Απόδειξη

Έστω $\rho \in S_n$ και $\sigma \in A_n$. Τότε:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho\circ\sigma\circ\rho^{-1}) &= \varepsilon(\rho)\,\varepsilon(\sigma)\,(\varepsilon(\rho))^{-1} \\ &= \underbrace{\varepsilon(\rho)\,(\varepsilon(\rho))^{-1}}_{1}\,\underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{1} = 1 \end{aligned}$$

οπότε: $\rho\circ\sigma\circ\rho^{-1} \in A_n$.

∎

► Εξωτερικό Ευθύ γινόμενο Ομάδων

Έστω $(G_1, \cdot)$ και $(G_2, *)$ δύο ομάδες.
Τότε το $G = G_1 \times G_2$ με πράξη

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 * y_2), \quad \forall x_1, x_2 \in G_1, \ \forall y_1, y_2 \in G_2$$

είναι ομάδα.

Απόδειξη

Εξ' ορισμού, η πράξη στο G είναι καλά ορισμένη.

(1) <u>προσεταιριστικότητα</u>: Για κάθε $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in G$ έχουμε:

$$(x_1, y_1)\big((x_2, y_2)(x_3, y_3)\big) = (x_1, y_1)(x_2 \cdot x_3, y_2 * y_3) =$$

$$\big(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3), y_1 * (y_2 * y_3)\big) = \big((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3, (y_1 * y_2) * y_3\big) =$$

$$(x_1 \cdot x_2, y_1 * y_2)(x_3, y_3) = \big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big)(x_3, y_3) \quad \checkmark$$

(2) <u>ύπαρξη ουδέτερου</u>: $e = (e_{G1}, e_{G2}) \in G$.

Για κάθε $(x,y) \in G$ έχουμε:

$(x,y)e = (x,y)(e_{G1}, e_{G2}) = (x \cdot e_{G1}, y * e_{G2}) = (x,y)$

$= (e_{G1} \cdot x, e_{G2} * y) = (e_{G1}, e_{G2})(x,y) = e(x,y) = (x,y)$

(3) Έστω $(x,y) \in G$. Για το $(x^{-1}, y^{-1}) \in G$

έχουμε: $(x,y)(x^{-1}, y^{-1}) = (x \cdot x^{-1}, y * y^{-1}) =$

$= (e_{G1}, e_{G2}) = (x^{-1} x, y^{-1} * y) = (x^{-1}, y^{-1})(x,y)$

Άρα, $(x,y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1})$

Συνεπώς το ζεύγος $(G_1 \times G_2, \cdot)$ είναι

ομάδα με αδέτερο στοιχείο $e = (e_{G1}, e_{G2})$

και για κάθε $(x,y) \in G_1 \times G_2$ ισχύει

$(x,y)^{-1} = (y^{-1}, x^{-1})$.

Ασκήσεις

Έστω $(G_1, \cdot)$ και $(G_2, *)$ δύο ομάδες.
Να αποδείξετε ότι:

(i) $G_1 \times G_2$: αβελιανή $\Longleftrightarrow$ G_1, G_2 : αβελιανές

(ii) $Z(G_1 \times G_2) = Z(G_1) \times Z(G_2)$

Συμπέρασμα: Οι ομάδες $(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, +)$ είναι αβελιανές για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $|\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m| = nm$ ενώ για παράδειγμα $\mathbb{Z}_m \times S_n$ για $m \in \mathbb{N}$ και $n \geq 3$ (ή $\mathbb{Z} \times S_n$, $\mathbb{Q} \times S_n$, $\mathbb{R} \times S_n$, $n \geq 3$) δεν είναι αβελιανές και άρα ούτε κυκλικές. Αργότερα, θα αποδείξαμε ότι

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m : \text{κυκλική} \Longleftrightarrow (n, m) = 1.$$