Άλγεβρα Ι : 1º μάθημα

2/4/2024

- email: 1) e.papapetros@upatras.gr (πανεπιστημιακό)
  2) bpapapetros@gmail.com

Προαπαιτούμενα

- Θεωρία Συνόλων
- Στοιχειώδης Θεωρία Αριθμών
- Γραμμική Άλγεβρα Ι

Βασικά Σύνολα

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ← σύνολο των φυσικών αριθμών

ή $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

↳ σύνολο των ακεραίων αριθμών

• $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$: σύνολο των ρητών αριθμών

• Συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$ τα σύνολα των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών, αντίστοιχα. Θεωρούμε γνωστές τις βασικές στοιχειώδεις ιδιότητες των $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$.

• Πράξεις και Κατασκευές Συνόλων

Έστω X ένα μη-κενό σύνολο.

(I) Το δυναμοσύνολο του X ορίζεται να είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(X)$.

$$\mathcal{P}(X) = \{ A \mid A \subseteq X \}$$

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

(II) Αν $A, B \subseteq X$ τότε ορίζουμε

• $A \cap B = \{ x \in X \mid x \in A \text{ και } x \in B \} \leftarrow$ τομή των A, B

• $A \cup B = \{ x \in X \mid x \in A \text{ ή } x \in B \} \leftarrow$ ένωση των A, B

- $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A$ και $x \notin B\}$

  ↳ συμπλήρωμα του B στο A.

- Γενικότερα, αν I είναι ένα σύνολο δεικτών και $(A_i)_{i \in I}$ οικογένεια υποσυνόλων του X, δηλαδή $A_i \subseteq X$ για κάθε $i \in I$, τότε ορίζουμε

(1) $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid x \in A_i, \forall i \in I\}$

(2) $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$

Αν το I είναι πεπερασμένο, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ γράφουμε απλούστερα:

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$

(II) Καρτεσιανό Γινόμενο

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_k$ μη-κενά σύνολα.

Το καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i=1}^{k} X_i = X_1 \times X_2 \times \dots X_k$

των συνόλων X_i, $i = 1, 2, \dots, k$, ορίζεται να είναι

το σύνολο όλων των διατεταγμένων κ-άδων

$(x_1, x_2, \dots, x_k)$, όπου $x_i \in X_i$, $1 \leq i \leq k$, δηλαδή:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k = \{ (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in X_i, \ \forall i = 1, 2, \dots, k \}.$$

• Στο $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$, δύο διατεταγμένες κ-άδες $(x_1, x_2, \dots, x_k)$, $(x_1', x_2', \dots, x_k')$ θεωρούνται ίσες, και τότε γράφουμε $(x_1, x_2, \dots, x_k) = (x_1', x_2', \dots, x_k')$, αν-ν: $x_i = x_i'$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$.

<u>Παράδειγμα</u>: $X_1 = \{1, 2, 3\}$, $X_2 = \{a, b\}$. Τότε

$$X_1 \times X_2 = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$$

▶ <u>Στοιχειώδης Θεωρία Απεικονίσεων</u>

(1) Αν X είναι μη-κενό σύνολο, τότε μια <u>διμελής σχέση επί του X</u> είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times X$.

πχ: $\Delta(X) = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$

↳ διαγώνιος του X.

(2) Γενικεύοντας το (1), μια σχέση R από ένα μη-κενό σύνολο X σε ένα μη-κενό σύνολο Y (ή αλλιώς, αντιστοιχία από το X στο Y),

ορίζεται να είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$. $(R \subseteq X \times Y)$

- Το <u>πεδίο ορισμού</u> της R είναι το σύνολο όλων των $x \in X$ για τα οποία υπάρχει $y \in Y$ ώστε $(x, y) \in R$, δηλ:

$$A_R = \{ x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R \} \subseteq X$$

- Το <u>σύνολο τιμών</u> της R ορίζεται ως

$$R(A_R) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R \} \subseteq Y$$

<u>Παράδειγμα</u>: $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}$

$$R = \{ (1,1), (4, \sqrt{2}), (5, \sqrt{2}), (100, -\tfrac{1}{2}), (32, 0) \} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{R}$$

- $A_R = \{ 1, 4, 5, 32, 100 \} \subseteq \mathbb{N}$
- $R(A_R) = \{ -\tfrac{1}{2}, 0, 1, \sqrt{2} \} \subseteq \mathbb{R}$

• Έστω X και Y δύο μη-κενά σύνολα.

Μια <u>απεικόνιση</u> (συνάρτηση) R από το X στο Y είναι μια σχέση R από το X στο Y (δηλαδή $R \subseteq X \times Y$) με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $\forall x \in X, \exists y \in Y : (x,y) \in R$
2. $(x,y) \in R$ και $(x,y') \in R \Rightarrow y = y'$

<u>Σχόλια</u>: Το 1. μας λέει ότι $A_R = X$ ενώ το 2. μας λέει ότι κάθε $x \in X$ "αντιστοιχίζεται" σε ένα ακριβώς $y \in Y$.

• Συνήθη σύμβολα απεικονίσεων: f, g, h, φ, ψ

οπότε αν $f \subseteq X \times Y$ είναι μια απεικόνιση από το X στο Y τότε συμβολίζεται ως

$$f : X \to Y.$$

• Για κάθε $x \in X$, το μοναδικό $y \in Y$ για το οποίο ισχύει $(x,y) \in f$ το συμβολίζουμε με $y = f(x)$.

Γράφουμε $f: X \to Y,\ x \mapsto f(x)$

▸ Έστω $f: X \to Y$ μια απεικόνιση και $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Ορίζουμε:

- $f(A) := \{ y \in Y \mid \exists x \in A : y = f(x) \} = \{ f(x) \in Y \mid x \in A \} \subseteq Y$

  ↳ <u>εικόνα του A μέσω της f.</u>

- $f^{-1}(B) := \{ x \in X \mid f(x) \in B \} \subseteq X$

  ↳ <u>αντίστροφη εικόνα του B μέσω της f.</u>

<u>Ειδικότερα</u>:

- $A = \emptyset$, $f(\emptyset) = \emptyset$
- $A = X$, $f(X) = \mathrm{Im}(f) \leftarrow$ σύνολο τιμών της f.
- $B = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- $B = Y$, $f^{-1}(Y) = X$

• Δύο απεικονίσεις $f: X \to Y$ και $g: X' \to Y'$ λέγονται <u>ίσες</u> αν-ν:

$$X = X',\ Y = Y' \text{ και } f(x) = g(x),\ \forall x \in X.$$

<u>Παραδείγματα</u>

(i) Για κάθε μη-κενό σύνολο X ορίζεται η <u>ταυτοτική απεικόνιση</u>

$$Id_X : X \longrightarrow X,\quad Id_X(x) = x$$

(ii) Έστω $\emptyset \neq S \subseteq X$. Ορίζεται η <u>απεικόνιση έγκλεισης</u> $i_S : S \to X,\ i_S(s) = s$

<u>Προσοχή</u>: $i_S \neq Id_S$ παρόλο που

$$i_S(s) = s = Id_S(s),\ \forall s \in S.$$

(iii) Έστω $f: X \to Y$ μια απεικόνιση. Αν A είναι μη-κενό υποσύνολο του X τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$f|_A : A \to Y,\quad f|_A(a) = f(a)$$

η οποία λέγεται <u>περιορισμός της f στο υποσύνολο A</u>.

Η Άλγεβρα των Απεικονίσεων

Αν $f: X \to Y$ και $g: Y \to Z$ είναι δύο απεικονίσεις, τότε ορίζεται η σύνθεση των απεικονίσεων f και g ως το ακόλουθο υποσύνολο του $X \times Z$:

$$g \circ f := \{(x, z) \in X \times Z \mid (f(x), z) \in g \subseteq Y \times Z\}$$

Αλλιώς: $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

<u>H/W</u>: Αποδείξτε ότι η $g \circ f$ όπως ορίστηκε παραπάνω είναι όντως απεικόνιση από το X στο Z.

Σχόλιο: Αν $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ και $h: Z \to W$ είναι απεικονίσεις, τότε ορίζονται οι συνθέσεις $h\circ(g\circ f)$ και $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει: $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ (προσεταιριστική ιδιότητα σύνθεσης)

↑ H/W

Παρατήρηση: Για κάθε απεικόνιση $f: X \to Y$ ισχύει $Id_Y \circ f = f$ και $f \circ Id_X = f$

▸ Έστω μια απεικόνιση $f: X \to Y$. Μπορούμε να ορίσουμε μια αντίστροφη διαδικασία από το Y στο X η οποία να είναι απεικόνιση;

Για να συμβεί αυτό, δηλαδή μια απεικόνιση $g: Y \to X$, η πιο φυσιολογική αντιστοίχηση είναι σε κάθε $y \in Y$ να αντιστοιχηθεί ακριβώς ένα $x \in X$ ώστε $y = f(x)$.

$$g(y) = x \iff y = f(x).$$

1º πρόβλημα: Δεν είναι βέβαιο ότι για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$

2º πρόβλημα: Αν $y \in Y$ τότε ίσως υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ και $y = f(x_1) = f(x_2)$.

Ορισμοί

Μια απεικόνιση $f: X \to Y$ λέγεται

(α) 1-1, αν για οποιαδήποτε $x, x' \in X$ ισχύει:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

(β) επί, αν $Im(f) = Y$, δηλαδή:

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X),\ f(x) = y$$

(γ) αντιστρέψιμη απεικόνιση, αν υπάρχει απεικόνιση $g: Y \to X$ έτσι ώστε

$$g \circ f = Id_X \quad \text{και} \quad f \circ g = Id_Y.$$

Πρόταση

Έστω μια απεικόνιση $f: X \to Y$. Η f είναι 1-1 και επί αν-ν είναι αντιστρέψιμη.

Απόδειξη: "$\Longrightarrow$" Υποθέτουμε ότι f: 1-1 και επί και θα δείξουμε ότι f: αντιστρέψιμη.

Έστω $y \in Y$. Αφού f: επί, υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$ και επειδή f: 1-1 το παραπάνω x είναι μοναδικό με αυτή την ιδιότητα.

Ορίζουμε $g: Y \to X$ με $g(y) = x$ όπου $f(x) = y$.

Η g ορίζει απεικόνιση από την παραπάνω διαδικασία. Θα αποδείξουμε: $\begin{cases} g \circ f = Id_X \\ \text{και} \\ f \circ g = Id_Y \end{cases}$

Έστω $x \in X$. Από ορισμό g, $g(f(x)) = x$, δηλ $(g \circ f)(x) = Id_X(x)$. Άρα, $g \circ f = Id_X$.

Έστω $y \in Y$. Τότε $g(y) = x$, όπου $f(x) = y$.

Άρα, $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = Id_Y(y)$

Επομένως, $f \circ g = Id_Y$, όπως θέλαμε.

"$\Leftarrow$" Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι αντιστρέψιμη και θα δείξουμε ότι f: 1-1 και επί.

Εξ' ορισμού, υπάρχει απεικόνιση $g: Y \to X$ ώστε $g \circ f = Id_X$ και $f \circ g = Id_Y$.

• <u>f: 1-1</u> : Έστω $x, x' \in X$ με $f(x) = f(x')$.

Επειδή $f(x), f(x') \in Y$, $f(x) = f(x')$ και η g είναι απεικόνιση, προκύπτει:

$$g(f(x)) = g(f(x')) \Rightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Id_X(x) = Id_X(x') \Rightarrow x = x'$$

• <u>f: επί</u> : Έστω $y \in Y$. Τότε $\underset{X}{g(y)} \in X$ και

$$f(g(y)) = (f \circ g)(y) = Id_Y(y) = y.$$

■

Αντίστροφη Συνάρτηση

Έστω απεικόνιση $f: X \to Y$ η οποία είναι 1-1 και επί. Από την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει απεικόνιση $g: Y \to X$ ώστε

$$g \circ f = Id_X \quad \text{και} \quad f \circ g = Id_Y .$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη απεικόνιση $h: Y \to X$ με $h \circ f = Id_X$ και $f \circ h = Id_Y$.

Θα αποδείξουμε ότι $h = g$. Ισοδύναμα θα αποδείξουμε ότι $h(y) = g(y)$, $\forall y \in Y$.

Έστω λοιπόν $y \in Y$. Υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $y = f(x)$. Τότε:

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = Id_X(x) = x \\ &\cdot\ h(y) = h(f(x)) = (h \circ f)(x) = Id_X(x) = x \end{aligned}\right\} \to \underline{\underline{g(y) = h(y)}}$$

Συνεπώς, για μια απεικόνιση $f: X \to Y$ η οποία είναι 1-1 και επί, υπάρχει μοναδική απεικόνιση $g: Y \to X$ με $\begin{cases} g \circ f = Id_X \\ \text{και} \\ f \circ g = Id_Y \end{cases}$

Η g καλείται <u>αντίστροφη απεικόνιση της f</u> και συμβολίζεται με $g = f^{-1}$. Άρα:

$f^{-1} \circ f = Id_X$, $\quad f \circ f^{-1} = Id_Y$ και

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

• Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν $f: X \to Y$ 1-1 και επί τότε: $(f^{-1})^{-1} = f$.

__Παρατήρηση:__ Έστω X ένα μη-κενό σύνολο.

Η σύνθεση απεικονίσεων $f, g, h, \ldots : X \to X$ ορίζεται πάντα. Συμβολίζουμε με $F(X)$ το σύνολο των απεικονίσεων από το X στο X.

Προφανώς $F(X) \neq \emptyset$ διότι $Id_X \in F(X)$.

Ιδιαίτερα, αν $f: X \to X$ απεικόνιση (δηλ. $f \in F(X)$) και $n \in \mathbb{N}$ τότε ορίζουμε $f^n : X \to X$ ως

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n-\text{φορές}}$$

__Πιο σωστά:__ $f^0 = Id_X$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$.

Αν $n \geq 3$ και έχει οριστεί επαγωγικά η f^{n-1} τότε $f^n = f^{n-1} \circ f$

• Ένα πολύ σημαντικό υποσύνολο του $F(X)$ είναι το $S(X)$ που αποτελείται από τις 1-1 και επί απεικονίσεις από το X στο X

Προφανώς $S(X) \neq \emptyset$ διότι $Id_X \in S(X)$.

Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται (H/W) ότι αν $f, g \in S(X)$ τότε $f \circ g \in S(X)$ καθώς και $f^{-1} \in S(X)$. Όπως θα δούμε αργότερα τα $S(X)$ για $X \neq \emptyset$, και ιδιαίτερα όταν X: πεπερασμένο σύνολο, θα μας απασχολήσουν αρκετά στη θεωρία ομάδων. Το $S(X)$ λέγεται ομάδα μεταθέσεων του X.

<u>**πχ**</u> : $X = \{1, 2\}$, $S(X) = S(\{1,2\}) =: S_2$

- $Id_X : X \to X$, $x \mapsto x$
- $\sigma : \{1,2\} \to \{1,2\}$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$

Η S_2 αποτελείται από δύο στοιχεία.

▸ Όπως είδαμε, αν X είναι μη-κενό σύνολο τότε στο σύνολο $S(X)$ των 1-1 και επί απεικονίσεων από το X στον εαυτό του ισχύουν τα ακόλουθα:

1) $f, g \in S(X) \Rightarrow f \circ g \in S(X)$

2) $f, g, h \in S(X) \rightarrow f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

3) $(\exists Id_X \in S(X))(\forall f \in S(X)),\ f \circ Id_X = f = Id_X \circ f$

4) $(\forall f \in S(X))(\exists f^{-1} \in S(X)),\ f \circ f^{-1} = Id_X = f^{-1} \circ f$

? Έχουμε άλλα παραδείγματα συνόλων εφοδιασμένα με κάποια πράξη που να ικανοποιούν αντίστοιχες ιδιότητες με τις 1)-4) παραπάνω ή να μην ικανοποιούν κάποια από αυτές.