Ονοματεπώνυμο:.. ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2024

Διδάσκων: Δ. Καββαδίας - Χ. Ραπτόπουλος

1. (15 μον.) Να δείξετε ότι κάθε δέντρο με n κορυφές είναι διμερές γράφημα και στη συνέχεια ότι περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο κορυφών μεγέθους τουλάχιστον $\frac{n}{2}$.

   Απάντηση

   Έστω v μια κορυφή του δέντρου. Ορίζουμε τα σύνολα $A = \{u : dist(u, v) = \text{ άρτιος}\}$ και $B = \{u : dist(u, v) = \text{ περιττός}\}$, όπου $dist(u, v)$ είναι η απόσταση της u από την v. Εφόσον σε ένα δέντρο υπάρχει μοναδικό μονοπάτι μεταξύ δυο οποιωνδήποτε κορυφών, κάθε κορυφή ανήκει ακριβώς σε ένα από τα A, B και δεν υπάρχουν ακμές μεταξύ δυο κορυφών του ίδιου συνόλου. Άρα πρόκειται για διμερές γράφημα.

   Εναλλακτικά, ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο εάν δεν περιέχει κύκλους περιττού μήκους. Συνεπώς, ένα δέντρο είναι διμερές επειδή δεν περιέχει κανέναν κύκλο.

   Ολοκληρώνουμε την απάντηση παρατηρώντας ότι $|A| + |B| = n$, και άρα τουλάχιστον ένα από τα δυο σύνολα πρέπει να έχει τουλάχιστον $n/2$ κορυφές.

2. (10 μον.) Για την θέση του προέδρου σε ένα πανεπιστημιακό τμήμα υπάρχουν 3 υποψήφιοι, έστω A, B, C, και κάθε ψηφοφόρος μπορεί να ψηφίσει από 0 (λευκό) μέχρι και 3 από αυτούς. Να βρείτε πόσοι ψήφισαν συνολικά (συμπεριλαμβάνοντας και τα λευκά) αν ο A πήρε 18 ψήφους, ο B πήρε 15 ψήφους, ο C πήρε 10 ψήφους, 10 ψήφοι περιείχαν τους A και B μαζί, 6 ψήφοι περιείχαν τους A και C, 5 ψήφοι περιείχαν τους C και B, 1 άτομο ψήφισε και τους 3 υποψήφιους, ενώ υπήρχαν 5 λευκά.

   Απάντηση

   Έστω A, B, C τα σύνολα των ψήφων που περιείχαν τους A, B, C, αντίστοιχα. Από την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, έχουμε $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 23$. Λαμβάνοντας υπόψη και τα λευκά, συνολικά ψήφισαν 28 άτομα.

3. (15 μον.) Να εξετάσετε ως προς την ορθότητα τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας:

   i. Ο τύπος $(p \vee q \vee \neg p) \wedge (r \vee q \vee \neg q) \wedge (r \vee p \vee \neg r)$ είναι ταυτολογία.

   ii. Ο τύπος $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση.

   iii. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

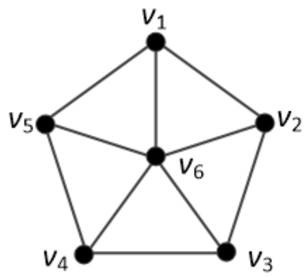
   Απάντηση

i. Σωστό γιατί κάθε κομμάτι του τύπου μέσα στις παρενθέσεις περιέχει τη διάζευξη μιας μεταβλητής και της άρνησής της.

ii. Σωστό. Για παράδειγμα, αν q είναι ψευδής, τότε ο τύπος επαληθεύεται, ενώ αν q είναι αληθής, τότε δεν επαληθεύεται.

iii. Σωστό, επειδή το αριστερό μέλος επαληθεύεται αν και μόνον εάν τα p, q έχουν την ίδια τιμή, πράγμα που ισχύει και για το δεξί μέλος.

4. (15 μον.) Δίνεται το παρακάτω γράφημα:



i. Δείξτε ότι υπάρχουν 3 ακμές που αν αφαιρεθούν, στο γράφημα που προκύπτει όλοι οι κύκλοι έχουν άρτιο μήκος.

ii. Δείξτε ότι δεν μπορεί να προκύψει γράφημα του οποίου όλοι οι κύκλοι είναι άρτιοι, αν αφαιρεθούν λιγότερες από 3 ακμές.

Απάντηση

i. Ένα τέτοιο σύνολο 3 ακμών είναι π.χ. το $\{v_4v_3, v_5v_6, v_6v_2\}$. Στο υπολειπόμενο γράφημα κάθε κύκλος είναι άρτιος.

ii. Έστω ότι υπάρχουν 2 ακμές που η αφαίρεση τους δίνει γράφημα χωρίς περιττό κύκλο. Στο γράφημα υπάρχει ο εξωτερικός κύκλος μήκους 5 καθώς και 5 τρίγωνα. Για να καταστραφεί λοιπόν ο εξωτερικός κύκλος πρέπει να φύγει μία τουλάχιστον εξωτερική ακμή. Δεν μπορεί και η δεύτερη ακμή να είναι εξωτερική διότι τότε δεν καταστρέφονται όλα τα τρίγωνα. Άρα θα πρέπει να είναι εσωτερική ακμή. Όμως δεν υπάρχει τρόπος με την αφαίρεση μιας μόνο ακμής να καταστραφούν όλα τα τρίγωνα. Άτοπο.

5. (10 μον.) Γράψτε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον συντελεστή που δίνει το πλήθος των μη αρνητικών ακεραίων λύσεων της εξίσωσης

$$x + 2y + 3z + 4w = 30,$$

με τους περιορισμούς: $x \geq 5$ και $w \leq 6$.

Απάντηση

Ο απαριθμητής για μια μεταβλητή θα πρέπει να εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να συνεισφέρει κάθε μονάδας της μεταβλητής στο άθροισμα στο αριστερό μέρος της εξίσωσης. Για παράδειγμα, κάθε μονάδα της w συνεισφέρει 4 μονάδες στο άθροισμα $x + 2y + 3z + 4w$, οπότε οι τιμές $w = 0, 1, ..., \ldots, 6$ αντιστοιχούν στους όρους $u^{0\cdot 4}, u^{1\cdot 4}, \ldots, u^{6\cdot 4}$, στον απαριθμητή για την w.

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς, ο απαριθμητής για την x είναι $u^5 + u^6 + \cdots + u^{30}$, για την y είναι $1 + u^2 + \ldots + u^{30}$, για την z είναι $1 + u^3 + \cdots + u^{30}$ και για την w είναι $1 + u^4 + \cdots + u^{24}$.

Συνολικά, η γεννήτρια συνάρτηση είναι $(u^5 + u^6 + \cdots + u^{30})(1 + u^2 + \ldots + u^{30})(1 + u^3 + \cdots + u^{30})(1 + u^4 + \cdots + u^{24})$, ενώ ο ζητούμενος συντελεστής είναι αυτός του u^{30}.

6. (20 μον.) Θεωρούμε μια δομή όπου σύμπαν είναι το σύνολο των θετικών φυσικών αριθμών $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \ldots\}$ και η οποία είναι εφοδιασμένη με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q όπου $Q(x, y)$ ερμηνεύεται σαν «ο x διαιρεί ακριβώς τον y» (ισοδύναμα $y \mod x = 0$), και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $>$ με τη συνήθη ερμηνεία.

   i. Δώστε τύπο φ με ερμηνεία «για οποιουσδήποτε δυο θετικούς φυσικούς αριθμούς υπάρχει ένας μοναδικός μέγιστος κοινός διαιρέτης».

   ii. Να εκφράσετε σε φυσική γλώσσα την ιδιότητα που προσδίδει στο x ο τύπος $\psi(x) = \forall y(Q(x, y) \to \exists z(\neg Q(x, z) \wedge (y > z)))$.

   Απάντηση

   i. $\forall x \forall y \exists z(Q(z, x) \wedge Q(z, y) \wedge (\forall w(Q(w, x) \wedge Q(w, y)) \to ((z > w) \vee (w \approx z))))$

   ii. Ο x είναι τουλάχιστον 2. Πράγματι, αν $x = 1$, τότε ο τύπος μέσα στην παρένθεση δεν επαληθεύεται για $y = 1$. Αντίθετα, αν $x \geq 2$, τότε το $Q(x, y)$ αληθεύει όταν $y = kx$, για κάποιο θετικό φυσικό $k \geq 1$, και το μέλος δεξιά της συνεπαγωγής επαληθεύεται για $z = kx - 1$.

7. (20 μον.) Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας 8 διακεκριμένες κόκκινες μπάλες και 12 διακεκριμένες μπλε μπάλες.

   i. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 5 ζευγάρια αποτελούμενα από μια κόκκινη και μια μπλε μπάλα το κάθε ένα;

   ii. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε όλες τις μπάλες σε μια σειρά, έτσι ώστε μεταξύ οποιωνδήποτε κόκκινων μπαλών να υπάρχει τουλάχιστον μια μπλε;

   iii. Τοποθετούμε όλες τις μπάλες σε ένα καλάθι. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 100 μπάλες με επανατοποθέτηση (α) αν η σειρά επιλογής δεν έχει σημασία και (β) αν η σειρά επιλογής έχει σημασία;

   Απάντηση

   i. Θα δώσουμε δυο διαφορετικές απαντήσεις, ανάλογα με το αν τα ζευγάρια θεωρούνται αριθμημένα (δηλ. 1ο, 2ο, κ.ο.κ.) ή όχι. Όπως θα δούμε, τα δυο αποτελέσματα διαφέρουν κατά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα 5!, αλλά παρόλα αυτά και οι δυο απαντήσεις θεωρούνται σωστές. Επίσης, θεωρούμε ότι οι θέσεις ενός ζευγαριού δεν είναι διακεκριμένες, άρα δεν παίζει ρόλο η σειρά της μπλε και κόκκινης μπάλας μέσα σε κάθε ζευγάρι (σε αντίθετη περίπτωση, η τελική απάντηση θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με 2^5).

      Αριθμημένα ζευγάρια: Επιλέγουμε και διατάσσουμε τις 5 κόκκινες μπάλες των ζευγαριών με $(8)_5$ τρόπους και τις 5 μπλε μπάλες με $(12)_5$ τρόπους, οπότε συνολικά οι τρόποι είναι $(8)_5(12)_5 = \frac{8!}{3!}\frac{12!}{7!}$.

Μη-αριθμημένα ζευγάρια: Επιλέγουμε 5 κόκκινες μπάλες με $C(8,5)$ τρόπους και 12 μπλε μπάλες με $C(12,5)$ τρόπους. Στη συνέχεια, θεωρούμε τις 5 κόκκινες μπάλες ως 5 διακεκριμένες θέσεις, στις οποίες τοποθετούμε τις 5 μπλε μπάλες με 5! τρόπους, ώστε να σχηματιστούν τα ζευγάρια. Συνολικά, οι τρόποι είναι $C(8,5)C(12,5)5! = \frac{8!}{3!5!}\frac{12!}{7!}$.

ii. Θα δώσουμε δύο λύσεις, η πρώτη που είναι σημαντικά απλούστερη και πιο «καθαρή», με την έννοια ότι είναι δυσκολότερο να γίνει λάθος και μία δεύτερη που επιχειρήθηκε από πολλούς φοιτητές.

Στην πρώτη προσέγγιση τοποθετούμε πρώτα τις μπλε μπάλες με 12! τρόπους (μετάθεση των 12 μπαλών) και στη συνέχεια τοποθετούμε τις κόκκινες επιλέγοντας 8 «διάκενα» μεταξύ των μπλε μπαλών (υπάρχουν 13 τέτοια ανάμεσα από 2 μπλε μπάλες και στην αρχή και στο τέλος της μπλε σειράς) και τα διατάσσουμε με $(13)_8$ τρόπους ώστε κάθε ένα από τα επιλεγέντα διαστήματα να αντιστοιχηθεί με μία κόκκινη μπάλα. Με τον τρόπο αυτό δεν υπάρχουν συνεχόμενες κόκκινες μπάλες. Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $12!\frac{13!}{5!}$.

Στην δεύτερη προσέγγιση μεταθέτουμε πρώτα τις κόκκινες μπάλες με 8! τρόπους και στην συνέχεια επιλέγουμε και διατάσσουμε 7 μπλε μπάλες ώστε να τοποθετηθούν ανάμεσα από τις 8 κόκκινες μπάλες για να ικανοποιηθεί ο περιορισμός. Οι τρόποι αυτής της επιλογής είναι $(12)_7$. Στην συνέχεια τοποθετούμε τις 5 μπλε μπάλες που απέμειναν στις 9 θέσεις ανάμεσα από τις κόκκινες μπάλες και στην αρχή και στο τέλος της σειράς. Εδώ έχουμε τοποθέτηση 5 διακεκριμένων μπαλών σε 9 διακεκριμένες υποδοχές *με την σειρά τοποθέτησης τους στις υποδοχές να έχει σημασία*. Οι τρόποι είναι (βλ. διαφάνειες) $\frac{(5+9-1)!}{(9-1)!} = \frac{13!}{8!}$. Το σημαντικό είναι ότι οι θέσεις τοποθέτησης είναι 9 και όχι 15 διότι κάθε μία από τις 7 μπάλες που τοποθετήθηκαν στο δεύτερο βήμα δεν δημιουργεί καινούργιο διάκενο με την αριστερή του κόκκινη μπάλα, διότι αν τοποθετούσαμε εκεί κάποια(ες) από τις 5 μπάλες, θα διπλομετρούσαμε την περίπτωση που αυτή η μπάλα θα ήταν μία από τις 7. (Δείτε και την λύση της Άσκησης 7 στο 5ο σετ ασκήσεων.) Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $8!\frac{12!}{5!}\frac{13!}{8!} = 12!\frac{13!}{5!}$.

iii. (α) Πρόκειται για συνδυασμούς 100 αντικειμένων από 20 διακεκριμένα αντικείμενα με επανάληψη, άρα $\binom{20+100-1}{100} = \binom{119}{100}$.

(β) Για κάθε επιλογή έχουμε 20 διαφορετικές διαθέσιμες μπάλες, άρα 20^{100}.