Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2023

Διδάσκων: Δ. Καββαδίας

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Αν ένα γράφημα δεν χρωματίζεται με k χρώματα τότε έχει μια κλίκα με $k+1$ κορυφές.

   ii. Αν όλες οι κορυφές ενός απλού γραφήματος έχουν άρτιο βαθμό τότε δεν υπάρχει γέφυρα (ακμή που η διαγραφή της να αυξάνει το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών) στο γράφημα.

   iii. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών 4,2,2,2,1,1.

   iv. Είτε το $K_{n,m}$ είτε το συμπληρωματικό του (ή και τα δύο) είναι επίπεδο γράφημα.

   v. Ο χρωματικός αριθμός (δηλ. ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων με τα οποία μπορεί να χρωματιστεί νόμιμα) ενός γραφήματος είναι το άθροισμα των χρωματικών αριθμών των συνιστωσών του.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Ο κύκλος πέντε κορυφών C_5 δεν χρωματίζεται με 2 χρώματα και η μεγαλύτερη κλίκα στο C_5 έχει μέγεθος 2.

   ii. Αληθής. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει γέφυρα τότε μετά την διαγραφή της γέφυρας τα δύο άκρα της μειώνουν τον βαθμό τους κατά 1 και θα υπάρχουν ακριβώς 2 κορυφές περιττού βαθμού. Η κάθε συνεκτική συνιστώσα που περιέχει κάθε ένα από αυτά τα άκρα θα αποτελεί και γράφημα από μόνη της αλλά τότε θα υπάρχει ακριβώς 1 κορυφή περιττού βαθμού μέσα στη συνεκτική συνιστώσα κάτι που είναι αδύνατο.

   iii. Αληθής. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο έχουμε $4,2,2,2,1,1 \to 1,1,1,0,1 \equiv 1,1,1,1,0$. Η τελευταία ακολουθία είναι προφανώς γραφική.

   iv. Ψευδής. Αν $n, m \geq 5$, τότε το $K_{n,m}$ δεν είναι επίπεδο. Το συμπληρωματικό του περιλαμβάνει το K_5 σαν υπογράφημα άρα και αυτό δεν είναι επίπεδο.

   v. Ψευδής. Είναι ο μέγιστος χρωματικός αριθμός μεταξύ των χρωματικών αριθμών όλων συνιστωσών.

2. (10 μον.) Έστω $e = (x, y)$ μία ακμή ενός γραφήματος G. Η πράξη της *υποδιαίρεσης* της ακμής e είναι η πράξη όπου εισάγουμε μία καινούργια κορυφή u στο γράφημα, διαγράφουμε την ακμή e και εισάγουμε τις ακμές (x, u) και (u, y). (Στην ουσία δηλαδή όταν υποδιαιρούμε την ακμή e, εισάγουμε «πάνω» στην e μια καινούργια κορυφή.) Έστω ότι το G έχει n κορυφές και m ακμές. Υποδιαιρούμε όλες τις ακμές του G και έστω G' το γράφημα που προκύπτει.

i. Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το G', συναρτήσει των n και m;
ii. Έστω ότι το G έχει κύκλο Euler. Έχει το G' κύκλο Euler;
iii. Όπως το (iii), αλλά για κύκλο Hamilton.
iv. Δείξτε ότι το G' είναι διμερές.

Απάντηση

i. Η υποδιαίρεση όλων των ακμών του G σημαίνει ότι εισάγουμε m καινούργιες κορυφές και επειδή κάθε ακμή του αντικαθίσταται από δύο ακμές, έχουμε ότι οι κορυφές του G' είναι $n + m$ και οι ακμές του $2m$.
ii. Αν το G έχει κύκλο Euler, τότε κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό. Όλες οι καινούργιες κορυφές στο G' έχουν βαθμό 2 και συνεπώς όλες του οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό, άρα έχει κύκλο Euler.
iii. Το G' δεν έχει κύκλο Hamilton. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το G να είναι το K_4. Έχει προφανώς κύκλο Hamilton αλλά το G', δεν έχει.
iv. Έστω C ένας κύκλος του G με k ακμές. Το μήκος του αντίστοιχου κύκλου στο G' είναι τώρα $2k$, δηλαδή άρτιος αριθμός. Συνάγουμε ότι κάθε κύκλος στο G' έχει άρτιο μήκος, άρα είναι διμερές.

3. (15 μον.) Έστω φ τύπος της Προτασιακής Λογικής, που δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση, και προτασιακή μεταβλητή p. Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

i. Ο τύπος $\varphi \wedge (p \vee \neg p)$ είναι ταυτολογία.
ii. Ο τύπος $\varphi \vee (p \wedge \neg p)$ είναι ταυτολογία.
iii. Ο τύπος $\varphi \to (p \vee \neg p)$ είναι ταυτολογία.
iv. Ο τύπος $\varphi \to (p \wedge \neg p)$ είναι ταυτολογία.
v. Ο τύπος $p \to (\neg\varphi \to p)$ είναι ταυτολογία.

Απάντηση

i. Ψευδής. Ο τύπος ισοδυναμεί με $\varphi \wedge 1 \equiv \varphi$, και ο φ (κατά την εκφώνηση) δεν είναι ταυτολογία.
ii. Ψευδής. Ο τύπος ισοδυναμεί με $\varphi \vee 0 \equiv \varphi$, και ο φ δεν είναι ταυτολογία.
iii. Αληθής. Ο τύπος ισοδυναμεί με $\varphi \to 1$, το οποίο είναι πάντοτε ΑΛΗΘΕΣ, όπως και αν αποτιμάται ο φ.
iv. Ψευδής. Ο τύπος ισοδυναμεί με $\varphi \to 0$, και ο φ δεν είναι αντίφαση, άρα ενδέχεται να συμβεί $(1 \to 0) = 0$.
v. Αληθής. Ο τύπος προκύπτει από το ΑΣ1 με αντικατάσταση του φ από την μεταβλητή p και του ψ από τον φ.

4. (15 μον.) Στην πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο G με ερμηνεία «$G(x, y)$: οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή», δίνεται ο τύπος:

$$\varphi(x, y) = \neg G(x, y) \wedge \exists u(G(x, u) \wedge G(u, y))$$

i. Εξηγήστε στην φυσική γλώσσα (στα Ελληνικά) τι λέει ο παραπάνω τύπος.

ii. Επαληθεύεται ο τύπος φ στον κύκλο C_5; Στο πλήρες γράφημα K_5;

Απάντηση.

i. Ο τύπος λέει «Οι κορυφές x και y δεν ενώνονται με ακμή αλλά υπάρχει μία (άλλη) κορυφή η οποία ενώνεται και με τις δύο».

ii. Ο τύπος επαληθεύεται στον C_5. Θεωρούμε σαν x και y δύο οποιεσδήποτε μη διαδοχικές κορυφές του κύκλου. Αυτές δεν συνδέονται μεταξύ τους και υπάρχει κορυφή που συνδέεται και με τις δύο (η ενδιάμεση). Στο K_5 δεν επαληθεύεται διότι όλες οι κορυφές συνδέονται μεταξύ τους.

5. (10 μον.) Στο επίπεδο χαράσσουμε 10 ευθείες γραμμές από τις οποίες οι 3 είναι υποχρεωτικά παράλληλες μεταξύ τους. Ποιός είναι ο μέγιστος αριθμός σημείων τομής που μπορούν να υπάρξουν μεταξύ δύο ευθειών;

   Παρατήρηση: Ο μέγιστος αριθμός σημείων τομής προφανώς προκύπτει όταν καμία από τις 7 τυχαίες ευθείες δεν είναι παράλληλη με κάποιαν άλλη και επιπλέον δεν υπάρχουν τρεις ευθείες που να διέρχονται από το ίδιο σημείο.

   Απάντηση

   Ακολουθώντας την παρατήρηση, ο μέγιστος αριθμός τομών προκύπτει αν οι 7 γραμμές που δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες τέμνονται μεταξύ τους ανά δύο και επίσης τέμνουν τις παράλληλες γραμμές. Ο υπολογισμός των σημείων τομής των 7 γραμμών μεταξύ τους είναι συνδυασμός 2 αντικειμένων από 7 αντικείμενα και άρα ο αριθμός τους είναι $\binom{7}{2} = 21$, ενώ ο υπολογισμός των σημείων τομής με τις παράλληλες ακμές γίνεται με απλή εφαρμογή του κανόνα του γινομένου, $7 \cdot 3 = 21$. Από τον κανόνα του αθροίσματος έχουμε ότι ο μέγιστος αριθμός τομών είναι 21+21=42.

6. (15 μον.) Μία τεχνική εταιρεία έχει 20 τεχνικούς (που είναι βέβαια διαφορετικά άτομα) από τους οποίους συγκροτούνται 10 συνεργεία των 2 τεχνικών, κάθε ένα από τα οποία χρησιμοποιεί ένα αυτοκίνητο. Με πόσους τρόπους μπορούν να συγκροτηθούν τα συνεργεία αν:

   i. Δεν υπάρχει περιορισμός για τα δύο μέλη ενός συνεργείου και τα 10 αυτοκίνητα της εταιρείας είναι όλα διαφορετικού τύπου.

   ii. Δεν υπάρχει περιορισμός για τα δύο μέλη ενός συνεργείου και τα 10 αυτοκίνητα της εταιρείας είναι όλα ίδιου τύπου.

   iii. Οι 20 τεχνικοί της εταιρείας είναι 10 υδραυλικοί και 10 ηλεκτρολόγοι και κάθε συνεργείο πρέπει να έχει έναν ηλεκτρολόγο και έναν υδραυλικό ενώ και τα 10 αυτοκίνητα της εταιρείας είναι όλα ίδιου τύπου.

   Απάντηση

   i. Σε αυτή την περίπτωση κάθε συνεργείο προσδιορίζεται από τον τύπο του αυτοκινήτου που χρησιμοποιεί. Οι τρόποι είναι όσες οι μεταθέσεις 20 αντικειμένων που χωρίζονται σε 10 ομάδες όπου κάθε ομάδα έχει δύο μη διακεκριμένα μεταξύ τους αντικείμενα. Οι τρόποι είναι $\frac{20!}{2!^{10}}$.

ii. Σε αυτή την περίπτωση κάθε συνεργείο προσδιορίζεται μόνο από τα πρόσωπα που το συγκροτούν. Οι τρόποι είναι όσοι στο (i) αλλά διαιρεμένοι με 10!, ώστε να αναιρεθεί η διάταξη που υπάρχει στο (i). Δηλαδή $\frac{20!}{2!^{10} \cdot 10!}$.

iii. Εδώ υπάρχουν 10! τρόποι για να ταιριάξει ένας υδραυλικός με έναν ηλεκτρολόγο. Στην συνέχεια δεν έχει σημασία το ποιο αυτοκίνητο παίρνει κάθε συνεργείο.

7. (10 μον.) Ποιό είναι το πλήθος των κωδικών (passwords) μήκους 20 χαρακτήρων που μπορούν να σχηματιστούν από τα 26 κεφαλαία γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και τα 10 αριθμητικά ψηφία με τον περιορισμό ότι πρέπει να χρησιμοποιηθούν υποχρεωτικά αριθμητικά ψηφία σε 5 μη διαδοχικές θέσεις και οι υπόλοιπες 15 να έχουν γράμμα; Κάθε γράμμα ή ψηφίο μπορεί να επαναληφθεί χωρίς περιορισμό.

   Απάντηση.

   Υπολογίζουμε αρχικά το πλήθος των μη διαδοχικών θέσεων των 5 ψηφίων. Δεσμεύουμε τις 5 θέσεις των ψηφίων και ενδιάμεσα από δύο διαδοχικές θέσεις ψηφίων, δεσμεύουμε άλλη μία για γράμμα ώστε να μην παραβιάζεται ο περιορισμός. Οι υπόλοιπες 20-9=11 θέσεις διανέμονται στις 6 «υποδοχές» ανάμεσα από δύο ψηφία και στην αρχή και στο τέλος της συμβολοσειράς. Οι τρόποι είναι λοιπόν $\binom{11+6-1}{11} = \binom{16}{11}$. Στην συνέχεια τοποθετούμε τα 15 ψηφία με 26^{15} τρόπους και τα 5 ψηφία με 10^5 τρόπους. Συνολικά λοιπόν οι κωδικοί είναι $\binom{16}{11}26^{15}10^5$.

8. (20 μον.) 20 αυτοκίνητα θα παρκάρουν σε 3 πάρκινγκ χωρητικότητας 5, 10 και 20 θέσεων. Τα αυτοκίνητα θεωρούνται μη διακεκριμένα, άρα μόνο το πλήθος αυτοκινήτων σε κάθε πάρκινγκ έχει σημασία.

   i. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση για το πλήθος των τρόπων παρκαρίσματος και επισημάνετε την δύναμη ο συντελεστής της οποίας δίνει την απάντηση.

   ii. Βρείτε το πλήθος των τρόπων που μπορούν να παρκάρουν τα αυτοκίνητα, υπολογίζοντας τον συντελεστή.

   Απάντηση

   i. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι η παρακάτω. Οι απαριθμητές για τα πάρκινγκ των 5, 10 και 20 θέσεων είναι οι όροι από αριστερά προς τα δεξιά αντίστοιχα. Στην συνάρτηση αυτή αναζητούμε τον συντελεστή του x^{20}.

$$A(x) = (1 + x + \cdots + x^5)(1 + x + \cdots + x^{10})(1 + x + x^2 + \cdots)$$

   ii. Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{1-x^6}{1-x} \cdot \frac{1-x^{11}}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} \\
&= (1-x^6)(1-x^{11})(1-x)^{-3} \\
&= (1 - x^6 - x^{11} + x^{17}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3+k-1}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{k} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{k} x^{k+6} - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{k} x^{k+11} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2+k}{k} x^{k+17}
\end{aligned}$$

Προφανώς για να πάρουμε το x^{20} πρέπει το k στα τέσσερα αθροίσματα να γίνει αντίστοιχα $k = 20$, $k = 14$, $k = 9$ και $k = 3$. Συνεπώς ο συντελεστής είναι:

$$\binom{22}{20} - \binom{16}{14} - \binom{11}{9} + \binom{5}{3}$$