Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:.. ....
(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2023

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Αικ. Αρετάκη

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Αν στον πίνακα γειτνίασης ενός *απλού* γραφήματος G, οι γραμμές i και j είναι ίσες, τότε οι αντίστοιχες κορυφές (έστω v_i και v_j, αντίστοιχα) συνδέονται μεταξύ τους.

   ii. Υπάρχει γράφημα G με 12 κορυφές, 28 ακμές και μέγιστο βαθμό κορυφών 4.

   iii. Έστω G απλό επίπεδο γράφημα με 10 κορυφές και 14 ακμές. Το μέγιστο πλήθος ακμών που μπορούμε να προσθέσουμε στο G ώστε να παραμείνει απλό και επίπεδο είναι 10.

   iv. Κάθε επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνο είναι διμερές.

   v. Οι πίνακες γειτνίασης δύο ισόμορφων γραφημάτων είναι ίσοι.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Το ότι οι δύο γραμμές είναι ίσες σημαίνει ότι οι αντίστοιχες v_i και v_j κορυφές συνδέονται με *ακριβώς* τις ίδιες κορυφές. Αν όμως η v_i συνδέεται με την v_j, θα πρέπει και η v_j να συνδέεται με τον εαυτό της, άτοπο διότι το G είναι απλό γράφημα.

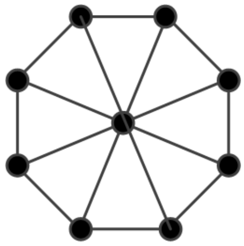
   ii. Ψευδής. Εφόσον ο μέγιστος βαθμός κορυφών είναι 4, το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών είναι το πολύ $\sum_{v\in V} \deg(v) \leq 4 \cdot 12 = 48$. Από το Λήμμα της Χειραψίας έπεται ότι οι ακμές του G είναι το πολύ 24, άτοπο.

   iii. Αληθής. Σε ένα απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές και m ακμές ισχύει ότι $m \leq 3n-6$. Εδώ $3n-6 = 24$ ενώ οι ακμές είναι 14. Συνεπώς το πολύ 10 επιπλέον ακμές μπορούν να προστεθούν στο G χωρίς να παραβιαστεί η ανισότητα.

   iv. Ψευδής. Π.χ. το C_5 δεν είναι διμερές.

   v. Ψευδής. Ο ένας μπορεί να προέλθει από τον άλλο με κάποιες αντιμεταθέσεις γραμμών και στηλών του άλλου αλλά δεν είναι αναγκαστικά ίσοι.

2. (15 μον.) Θεωρούμε τα γραφήματα K_n (πλήρες γράφημα n κορυφών), C_n (απλός κύκλος με n κορυφές), $\overline{C_n}$ (συμπληρωματικό γράφημα απλού κύκλου με n κορυφές), W_n (τροχός τάξης n, δηλαδή το γράφημα που αποτελείται από έναν απλό κύκλο με n κορυφές και μία ακόμη κορυφή που συνδέεται με όλες τις κορυφές του κύκλου. Π.χ. ο τροχός τάξης 8 απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα), $\overline{W_n}$ (συμπληρωματικό γράφημα τροχού τάξης n). Σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε $n \geq 3$ για να ορίζονται οι κύκλοι.



i. Για ποιες τιμές του n τα παραπάνω γραφήματα έχουν κύκλο Euler;

ii. Για ποιες τιμές του n τα παραπάνω γραφήματα έχουν κύκλο Hamilton;

Απάντηση

i. Για να έχει ένα γράφημα κύκλο Euler πρέπει να είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή του να έχει άρτιο βαθμό. Έτσι: στον K_n κάθε κορυφή έχει βαθμό $n-1$, άρα για να έχει κύκλο Euler πρέπει το $n \geq 3$ και να είναι περιττό. Στον C_n κάθε κορυφή έχει βαθμό 2, άρα έχει πάντα κύκλο Euler (για $n \geq 3$). Στο W_n κάθε εξωτερική κορυφή έχει βαθμό 3, άρα δεν έχει κύκλο Euler (για κάθε $n \geq 3$ που ορίζεται). Ο $\overline{C_n}$ είναι συνεκτικός για $n \geq 5$ και κάθε κορυφή του έχει βαθμό $n-3$. Άρα για να έχει κύκλο Euler πρέπει $n \geq 5$ και περιττό. Στο $\overline{W_n}$ η κεντρική κορυφή δεν συνδέεται με καμία άλλη, άρα δεν είναι συνεκτικό γράφημα.

ii. Ο K_n έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 3$. Ο C_n έχει κύκλο Hamilton για κάθε $n \geq 3$. Ο W_n ($n \geq 3$) έχει πάντα κύκλο Hamilton (διασχίζει τον εξωτερικό κύκλο και πριν την τελευταία ακμή επισκέπτεται την κεντρική κορφή και στην συνέχεια ολοκληρώνει τον κύκλο). Ο $\overline{C_n}$ ($n \geq 5$) έχει πάντα κύκλο Hamilton ενώ ο $\overline{W_n}$ δεν έχει για κανένα n διότι η κεντρική κορυφή είναι απομονωμένη.

3. (15 μον.) Έστω φ, χ και ψ προτασιακοί τύποι. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν; Αιτιολογήστε.

i. $\models \varphi \to ((\psi \to \neg\varphi) \to \varphi)$

ii. $\psi \models \neg\psi \to \neg\varphi$

iii. Αν $\varphi \models \psi$ και $\neg\varphi \models \chi$, τότε ισχύει επίσης ότι $\models \chi \vee \psi$.

iv. $\{\neg\varphi, \varphi\} \vdash \psi$

v. Το ΑΣ1 (Αξιωματικό Σχήμα 1) αποδεικνύεται τυπικά από τα άλλα δύο αξιωματικά σχήματα.

Απάντηση

i. Αληθής. Από το Θεώρημα Εγκυρότητας αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι ο τύπος είναι τυπικό θεώρημα. Από την μορφή του ο τύπος προέρχεται από το ΑΣ1 με αντικατάσταση του $\psi \to \neg\varphi$ στη θέση του ψ. Άρα είναι ταυτολογία.

ii. Αληθής. Όταν αληθεύει το ψ, τότε η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι ψευδής και άρα η συνεπαγωγή αληθής. Συνεπώς ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

iii. Αληθής. Από τις υποθέσεις για οποιαδήποτε αποτίμηση τουλάχιστον ένας από τους ψ και χ πρέπει να επαληθεύεται, άρα και η διάζευξη τους.

iv. Αληθής. Το σύνολο αριστερά είναι αντιφατικό άρα αποδεικνύει κάθε τύπο.

v. Ψευδής. Κάθε αξιωματικό σχήμα είναι ανεξάρτητο από τα άλλα δύο.

4. (20 μον.) Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο και $P(S)$ το σύνολο των υποσυνόλων του S. Έστω Q διμελές κατηγορηματικό σύμβολο που ερμηνεύουμε στο $P(S)$ ως εξής: $Q(x, y)$ αν και μόνο αν το σύνολο x είναι υποσύνολο του y, δηλαδή $x \subseteq y$. Στην δομή αυτή:

   i. Εξηγήστε στην φυσική γλώσσα τι δηλώνει ο παρακάτω τύπος ψ (δώστε μία κατά το δυνατό φυσική πρόταση, δηλαδή μην «απαγγείλετε» τον τύπο λέγοντας κάτι σαν «υπάρχει x...» κλπ.)

   $$\psi(x, y, z) = Q(z, x) \wedge Q(z, y) \wedge \forall w(w \neq z \wedge Q(z, w) \rightarrow \neg(Q(w, x) \wedge Q(w, y)))$$

   ii. Πόσες διαφορετικές τριάδες (x, y, z) υποσυνόλων του $S = \{0, 1, \dots, 9\}$ επαληθεύουν τον ψ;

   Απάντηση

   i) Το σύνολο z είναι η τομή των συνόλων x και y.

   (ii) Το 10-μελες σύνολο S έχει 2^{10} υποσύνολα και οποιοδήποτε από αυτά μπορεί ανεξάρτητα να πάρει τον ρόλο των x και y στον ψ. Για δύο δεδομένα σύνολα x και y υπάρχει μοναδικό σύνολο z που είναι η τομή τους. Συνεπώς υπάρχουν $2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 1 = 2^{20}$ διαφορετικές τριάδες που επαληθεύουν τον ψ.

5. (15 μον.) Σε ένα τουρνουά τένις μεταξύ των διαγωνιζόμενων παικτών A και B μπορούν να παιχτούν μέχρι n παρτίδες (n περιττός) και νικητής ανακηρύσσεται αυτός που φτάνει πρώτος στις μισές συν μία νίκες (ακέραιο μέρος), δηλαδή σε $\frac{n+1}{2}$ νίκες, οπότε και οι αγώνες σταματούν. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί ο A να νικήσει τον B; Για παράδειγμα με $n = 7$, ένας τρόπος είναι ο $AAAA***$, όπου η συμβολοσειρά δηλώνει ότι ο A κέρδισε τους πρώτους 4 αγώνες και τα * δηλώνουν ότι οι υπόλοιποι 3 δεν έγιναν, άλλος τρόπος είναι ο $AABAA**$ που δηλώνει ότι ο A κέρδισε τους πρώτους 2 αγώνες, τον τρίτο αγώνα κέρδισε ο B, τους επόμενους 2 κέρδισε πάλι ο A και δεν έγιναν οι τελευταίοι 2 αγώνες κλπ.

   Απάντηση

   Παρατηρούμε ότι σε μία συμβολοσειρά n χαρακτήρων που δηλώνει επιτυχία του A, υπάρχουν $\frac{n+1}{2}$ A, κάποιος αριθμός B και τα υπόλοιπα είναι *. Μέχρι και την εμφάνιση του $\frac{n+1}{2}$-οστου A, τα B που προηγούνται είναι λιγότερα από $\frac{n+1}{2}$ (αλλιώς θα είχε κερδίσει ο B). Συνεπώς τα * που (ίσως) υπάρχουν στο τέλος της συμβολοσειράς δεν έχουν σημασία και μπορούν να αντικατασταθούν με B. (Αυτό είναι ισοδύναμο με το να γίνονται *πάντα* n αγώνες στο τουρνουά, και αφού κριθεί ότι ο νικητής είναι ο A, οι υπόλοιποι αγώνες να δίνονται χαριστικά στον B!) Συνεπώς ζητάμε το πλήθος των συμβολοσειρών μήκους n με $\frac{n+1}{2}$ A και τα υπόλοιπα B. Αυτό είναι $\binom{n}{(n+1)/2}$.

6. (15 μον.) Από το σύνολο των ακέραιων και μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ επιλέγουμε τυχαία μία από αυτές. Ποιά είναι η πιθανότητα η λύση που θα επιλέξουμε να έχει ακριβώς $m \leq k$ μεταβλητές με τιμή 0;

   Απάντηση

   Το πλήθος όλων των ακέραιων και μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης είναι $\binom{n+k-1}{n}$. Για να υπολογίσουμε αυτές όπου m μεταβλητές είναι 0, επιλέγουμε πρώτα τις μεταβλητές αυτές με

$\binom{k}{m}$ τρόπους, και στην συνέχεια διανέμουμε τις n μονάδες στις υπόλοιπες $k-m$ μεταβλητές. Οι ζητούμενες λύσεις λοιπόν είναι $\binom{k}{m}\binom{n+(k-m)-1}{n}$, και άρα η ζητούμενη πιθανότητα p είναι:

$$p = \frac{\binom{k}{m}\binom{n+k-m-1}{n}}{\binom{n+k-1}{n}}$$

7. (10 μον.) Ποιά ακολουθία έχει γεννήτρια συνάρτηση την $A(x) = \frac{4x}{(1-x)^2}$;

   Απάντηση.

   Έχουμε $A(x) = 4x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2+k-1}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}4(k+1)x^{k+1} = 0\cdot x^0 + \sum_{k=1}^{\infty}4kx^k$. Δηλαδή η ακολουθία είναι η $0, 4, 8, 12, ...$ ή αλλιώς $a_n = 4n, n = 0, 1, 2, \ldots$.

8. (10 μον.) Ένας αρσιβαρίστας σηκώνει 150 κιλά τοποθετώντας στα δύο άκρα της μπάρας από 75 κιλά. Με πόσους τρόπους μπορεί να τοποθετήσει τα βάρη στο ένα άκρο της μπάρας (οπότε συμμετρικά θα τοποθετήσει αντίστοιχα και στο άλλο), αν για το κάθε άκρο έχει διαθέσιμα 20 βάρη του 1 κιλού, 10 2-κιλα βάρη και 10 10-κιλα βάρη; Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε την δύναμη του x ο συντελεστής της οποίας δίνει την απάντηση στο πρόβλημα. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον συντελεστή, αλλά για κάθε ένα από τους απαριθμητές της γεννήτριας σας, εξηγήστε αν μπορείτε να φτάσετε τις δυνάμεις μέχρι το άπειρο, χωρίς ο συντελεστής να είναι λάθος.

   Απάντηση

   Οι απαριθμητές είναι $(1+x+x^2+\cdots+x^{20})$ για τα βάρη του 1 κιλού, $(1+x^2+x^4+\cdots+x^{20})$ για τα βάρη των 2 κιλών και $(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{100})$ για τα βάρη των 10 κιλών.

   Συνεπώς η ΓΣ είναι

   $$(1+x+x^2+\cdots+x^{20})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{20})(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{100})$$

   Σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{75}. Οι απαριθμητές των βαρών 1 και 2 κιλών δεν μπορούν να φτάσουν μέχρι το άπειρο διότι δεν υπάρχουν αντίστοιχα διαθέσιμα βάρη. Ο απαριθμητής των 10-κιλων μπορεί να φτάσει γιατί τα διαθέσιμα 10-κιλα ξεπερνούν τα 75 κιλά.