Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....

(Συνολική βαθμολογία 110 μον. Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Πρόοδος Απριλίου 2023

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Αικ. Αρετάκη

1. (μον. 10) Να δείξετε ότι είναι μη ικανοποιήσιμα τα παρακάτω σύνολα τύπων. Αποφύγετε, αν είναι δυνατό, την χρήση πινάκων αληθείας.

   i. $T_1 = \{\neg x_1, \neg x_1 \to x_2, x_2 \to x_4, x_4 \to x_3, x_3 \to x_2, x_2 \to x_1\}$

   ii. $T_1 = \{x_1, \neg x_1 \lor x_4, \neg x_4 \lor x_3, \neg x_1 \lor \neg x_3\}$

   Απάντηση

   Θα προσπαθήσουμε, με σκοπό το άτοπο, να βρούμε αποτίμηση που επαληθεύει τα σύνολα.

   i. Για να επαληθεύεται το T_1 θα πρέπει (από τον πρώτο τύπο) $x_1 = \Psi$ και συνεπώς (από τους επόμενους τύπους διαδοχικά) $x_2 = A$, $x_4 = A$, $x_3 = A$, $x_2 = A$ και $x_1 = A$, άτοπο.

   ii. Για να επαληθεύεται το T_2 θα πρέπει (από τον πρώτο τύπο) $x_1 = A$ και συνεπώς διαδοχικά $x_4 = A$, $x_3 = A$ και (από τον τελευταίο τύπο) $x_1 = \Psi$, άτοπο.

2. ($4 \times 5 = 20$ μον.) Έστω T_1, T_2 σύνολα προτασιακών τύπων και φ, ψ προτασιακοί τύποι τέτοιοι ώστε $T_1 \models \varphi$ και $T_2 \models \psi$. Εξετάστε ποιες από παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές αληθεύουν, αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

   i. $T_1 \cup T_2 \models \varphi \land \psi$

   ii. $T_1 \cap T_2 \models \varphi \land \psi$

   iii. $T_1 \models \varphi \to \psi$

   iv. $T_2 \models \varphi \to \psi$

   Απάντηση

   i. Αληθεύει. Μία αποτίμηση που ικανοποιεί το σύνολο τύπων $T_1 \cup T_2$ ικανοποιεί και το σύνολο T_1 και το T_2 και άρα και τους τύπους φ και ψ. Συνεπώς και τον τύπο $\varphi \land \psi$.

   ii. Δεν αληθεύει. Μία αποτίμηση που ικανοποιεί το σύνολο $T_1 \cap T_2$ δεν ικανοποιεί αναγκαστικά το T_1 ή/και το T_2 και άρα δεν μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι και για τον τύπο $\varphi \land \psi$.

   iii. Δεν αληθεύει. Μία αποτίμηση που επαληθεύει το σύνολο T_1 επαληθεύει και τον τύπο φ, αλλά δεν ξέρουμε αν επαληθεύει και τον ψ ώστε να αληθεύει και ο τύπος $\varphi \to \psi$.

iv. Αληθεύει. Μία αποτίμηση που επαληθεύει το σύνολο T_2 επαληθεύει και τον τύπο ψ και άρα και την συνεπαγωγή $\varphi \to \psi$.

3. (20 μον.) Έστω P μία διμελής σχέση ορισμένη σε κάποιο σύνολο. Δώστε τύπους που να δηλώνουν (όταν αληθεύουν και οι τρεις μαζί) ότι η P είναι σχέση ισοδυναμίας. Δηλαδή δώστε τρεις τύπους που να δηλώνουν ο πρώτος ότι η P είναι ανακλαστική (αυτοπαθής), ο δεύτερος ότι είναι συμμετρική και ο τρίτος ότι είναι μεταβατική.

Απάντηση

i. Ανακλαστική: $\forall x P(x, x)$.

ii. Συμμετρική: $\forall x \forall y (P(x, y) \to P(y, x))$.

iii. Μεταβατική: $\forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z))$.

4. (20 μον.) Στο σκάκι υπάρχουν 8 όμοια πιόνια άσπρου χρώματος και 8 όμοια πιόνια μαύρου χρώματος. Υπολογίστε τους διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης και των 16 πιονιών στα 64 (8×8) διακεκριμένα τετραγωνίδια της σκακιέρας. (Μόνο οι τοποθετήσεις ενδιαφέρουν, δεν λαμβάνουμε υπόψη κανένα «σκακιστικό» περιορισμό.)

Απάντηση

Επιλέγουμε αρχικά τα 16 τετραγωνίδια που θα τοποθετηθούν τα 16 πιόνια με $\binom{64}{16}$ τρόπους και στην συνέχεια από αυτά επιλέγουμε τα 8 τετραγωνίδια των λευκών πιονιών με $\binom{16}{8}$ τρόπους. Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $\binom{64}{16}\binom{16}{8} = \frac{64!}{8!8!48!}$. Εναλλακτικά το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ότι αφορά μεταθέσεις 64 αντικειμένων, τα οποία απαρτίζουν 3 ομάδες όμοιων αντικειμένων, δηλαδή τα 8 άσπρα πιόνια, τα 8 μαύρα και τα 48 τετραγωνίδια τα οποία παραμένουν κενά.

5. (20 μον.) Σε ένα παιχνίδι μπιλιάρδου υπάρχουν 9 όμοιες μπάλες κόκκινου χρώματος και 6 μπάλες διαφορετικών μεταξύ τους χρωμάτων που δεν είναι κόκκινες. Στο μπιλιάρδο υπάρχουν 6 διακεκριμένες τρύπες. Υπολογίστε τους τρόπους να μπουν όλες οι μπάλες στις τρύπες όταν:

α) Κάθε μπάλα από τις 6 μπαίνει σε διαφορετική τρύπα, οι υπόλοιπες μπάλες σε οποιαδήποτε τρύπα και δεν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των μπαλών στις τρύπες.

β) 4 συγκεκριμένες μπάλες από τις 6 διαφορετικές μπάλες μπαίνουν σε διαφορετική τρύπα η καθεμία, ενώ οι υπόλοιπες 2 σε οποιαδήποτε τρύπα, όχι αναγκαστικά ίδια. Οι 9 όμοιες μπάλες τοποθετούνται έτσι ώστε κάθε τρύπα να περιέχει τουλάχιστον μία. Και πάλι η σειρά τοποθέτησης δεν έχει σημασία.

Απάντηση

α) Οι τρόποι τοποθέτησης των 6 διαφορετικών μπαλών, όπου κάθε μία μπαίνει σε διαφορετική τρύπα είναι όσες οι μεταθέσεις 6 αντικειμένων, δηλαδή 6! Στην συνέχεια οι 9 όμοιες μπάλες τοποθετούνται με $\binom{6+9-1}{9}$ τρόπους (συνδυασμοί των 6 ανά 9 με επανάληψη). Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $6!\binom{14}{9}$.

β) Οι τοποθετήσεις των 4 διαφορετικών μπαλών είναι όσες οι διατάξεις των 6 ανά 4 (επιλέγουμε και μεταθέτουμε τις 4 τρύπες στις οποίες θα μπουν), δηλαδή $(6)_4$ ενώ των 2 διαφορετικών είναι 6^2. Άρα οι τρόποι τοποθέτησης των 6 διαφορετικών μπαλών είναι $\frac{6!}{2!}6^2$. Οι όμοιες μπάλες τοποθετούνται τοποθετώντας αρχικά μία μπάλα σε κάθε τρύπα και στην συνέχεια οι υπόλοιπες 3 τοποθετούνται όπως προηγουμένως με $\binom{3+6-1}{3}$ τρόπους. Συνολικά οι τρόποι είναι $\frac{6!}{2!}6^2\binom{8}{3}$.

6. ($4 \times 5 = 20$ μον.) Έστω A ένα σύνολο με 5 διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία.

   i. Πόσα είναι τα υποσύνολα του A;

   ii. Πόσα είναι τα υποσύνολα του A με περισσότερα από ένα και το πολύ 4 στοιχεία;

   iii. Πόσες διμελείς σχέσεις ορίζονται στο A;

   iv. Πόσες τριμελείς σχέσεις ορίζονται στο A;

   Απάντηση

   i. 2^5

   ii. $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4}$.

   iii. Υπάρχουν $5^2 = 25$ ζεύγη στο Καρτεσιανό γινόμενο $A \times A$ και συνεπώς 2^{25} υποσύνολα του, κάθε ένα από τα οποία ορίζει και μία διμελή σχέση.

   iv. Ανάλογα με παραπάνω υπάρχουν $5^3 = 125$ τριάδες στο Καρτεσιανό γινόμενο $A \times A \times A$ και άρα 2^{125} τριμελείς σχέσεις.