Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2023

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Ν. Ρεκατσίνας

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.

   i. Το γράφημα $K_{n,m}$ περιλαμβάνει το K_4 σαν υπογράφημα για $n, m \geq 5$.

   ii. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών 3,3,3,1,0,0

   iii. Έστω G γράφημα που έχει και κύκλο Euler και κύκλο Hamilton και κάθε κορυφή του έχει βαθμό μεγαλύτερο του 2. Αν στο G αφαιρέσουμε τις ακμές του κύκλου Hamilton και το γράφημα που απομένει είναι συνεκτικό, τότε συνεχίζει να έχει κύκλο Euler.

   iv. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα με 7 κορυφές, 7 ακμές και 3 όψεις.

   v. Το συμπληρωματικό γράφημα του $K_{1,n}$, με $n \geq 3$, έχει κύκλο Hamilton.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Το K_4 έχει περιττό κύκλο ενώ το $K_{n,m}$ δεν έχει επειδή είναι διμερές.

   ii. Ψευδής. Αν υπήρχε, θα είχε 6 κορυφές από τις οποίες 2 απομονωμένες. Η κορυφή βαθμού 1 θα συνδεόταν με μια από τις κορυφές βαθμού 3, οπότε στην ουσία ζητάμε γράφημα 3 κορυφών με βαθμούς 3,3, 2 που προφανώς δεν υπάρχει.

   iii. Αληθής. Κατ' αρχήν το γράφημα που απομένει είναι συνεκτικό. Επίσης οι βαθμοί των κορυφών του είναι όλοι άρτιοι μια και κάθε μία έχει άρτιο βαθμό και της αφαιρούμε 2 ακμές. Άρα έχει κύκλο Euler.

   iv. Ψευδής. Αν υπήρχε θα έπρεπε να πληροί τον τύπο του Euler, δηλαδή 7+3=7+2, που δεν ισχύει.

   v. Ψευδής. Το συμπληρωματικό γράφημα του $K_{1,n}$ έχει μία απομονωμένη κορυφή, επομένως δεν μπορεί να έχει κύκλο Hamilton.

2. (20 μον.) Ο υπερκύβος Q_n διάστασης n είναι ένα απλό μη κατευθυντικό γράφημα που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

   1. Το Q_0 είναι το γράφημα με μία μόνο κορυφή (και άρα και καμία ακμή).

   2. Για να κατασκευάσουμε το $Q_n, n \geq 1$ όταν έχει κατασκευαστεί το Q_{n-1}, αριθμούμε αυθαίρετα τις κορυφές του τελευταίου, παίρνουμε δύο αντίγραφα του Q_{n-1} (με αριθμημένες τις κορυφές) και ενώνουμε με μία ακμή τις κορυφές με τον ίδιο αριθμό.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό:

i. Σχεδιάστε τα γραφήματα Q_1, Q_2 και Q_3

ii. Πόσες κορυφές έχει το Q_n (σαν συνάρτηση του n);

iii. Τι βαθμό έχει κάθε κορυφή του Q_n;

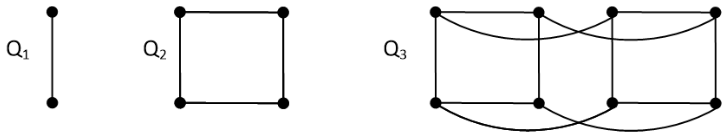
iv. Πόσες ακμές έχει το Q_n;

v. Για ποιές τιμές του n έχει το Q_n κύκλο Euler;

vi. (επιπλέον 1 βαθμός). Δείξτε με επαγωγή στο n ότι για $n \geq 2$, το Q_n έχει κύκλο Hamilton.

Απάντηση

i. Τα γραφήματα φαίνονται παρακάτω.



ii. Το Q_1 έχει 2 κορυφές, το Q_2 4, το Q_3 8 κλπ. Γενικά από τον τρόπο κατασκευής του Q_n, αυτό έχει το διπλάσιο πλήθος κορυφών από το Q_{n-1}. Δεδομένου ότι το Q_0 έχει 1 κορυφή, απλή επαγωγή δείχνει ότι το Q_n έχει 2^n κορυφές.

iii. Επειδή κατά τον σχηματισμό του Q_n μία κορυφή ενός από τα δύο αντίγραφα του Q_{n-1} ενώνεται με μία ακόμη κορυφή (την αντίστοιχη από το άλλο αντίγραφο του Q_{n-1}), ενώ ταυτόχρονα διατηρεί όλες τις ακμές των οποίων ήταν άκρο στο πρώτο αντίγραφο του Q_{n-1}, συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός κάθε κορυφής αυξάνεται κατά 1 στο Q_n σε σχέση με τον βαθμό που είχε στο Q_{n-1}. Άρα οι κορυφές του Q_n έχουν όλες βαθμό n.

iv. Από το (ii) το Q_n έχει 2^n κορυφές, όλες βαθμού (από το (iii)) n. Το Λήμμα της Χειραψίας δίνει ότι το πλήθος των ακμών του Q_n είναι $n2^n/2 = n2^{n-1}$ ($n \geq 1$).

v. Για να έχει το Q_n κύκλο Euler, θα πρέπει όλες οι κορυφές του να έχουν άρτιο βαθμό. Από το (iii) ο βαθμός κάθε κορυφής του Q_n είναι n. Συνεπώς το Q_n έχει κύκλο Euler για κάθε άρτιο $n > 1$.

vi. *Βάση:* Για $n = 2$ το Q_2 έχει προφανώς κύκλο Hamilton. *Υπόθεση:* Έστω ότι για $n \geq 2$ το Q_n έχει κύκλο Hamilton C. *Βήμα:* Έστω ότι στον C οι κορυφές i και j είναι διαδοχικές, δηλαδή συνδέονται με ακμή στον C. Εφόσον το Q_{n+1} κατασκευάζεται από δύο αντίγραφα του Q_n, ένας κύκλος Hamilton του Q_{n+1} πρώτα επισκέπτεται τις κορυφές του πρώτου αντιγράφου Q_n μέσω των ακμών του κύκλου Hamilton C από την κορυφή i στην κορυφή j (χωρίς να χρησιμοποιήσει την ακμή ij), στην συνέχεια χρησιμοποιεί την ακμή jj που συνδέει κορυφή j με την αντίστοιχη της στο άλλο αντίγραφο, μετά ακολουθεί τον αντίστοιχο κύκλο Hamilton C του δεύτερου αντίγραφου από την j στην i και καταλήγει στην κορυφή i του πρώτου αντιγράφου μέσω της ακμής ii.

3. (15 μον.) Έστω ότι $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ είναι προτασιακές μεταβλητές. Δείξτε ότι $\{p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots, p_9 \to p_{10}, p_{10} \to p_1\} \models (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{10}) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_{10})$. (*Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα ποιες αποτιμήσεις επαληθεύουν το αριστερό μέλος και δείξτε ότι επαληθεύουν και το δεξί.*) Ισχύει η αντίστροφη ταυτολογική συνεπαγωγή;

Απάντηση

Η αποτίμηση που αποδίδει Ψ σε όλες τις μεταβλητές, επαληθεύει και τους 10 τύπους του αριστερού μέλους. Επίσης, μία αποτίμηση που αποδίδει την τιμή Α σε μία μεταβλητή, έστω στην $p_i, 1 \leq i \leq 9$, σημαίνει ότι και η $p_{i+1} = A$ για να αληθεύει ο τύπος $p_i \to p_{i+1}$ (αν $i = 10$, πρέπει $p_1 = A$). Αυτό όμως σημαίνει ότι και $p_{i+2} = A$ λόγω του τύπου $p_{i+1} \to p_{i+2}$ και τελικά όλες οι μεταβλητές πρέπει να είναι αληθείς ώστε να αληθεύουν και οι 10 τύποι του αριστερού μέλους. Επομένως 2 ακριβώς αποτιμήσεις επαληθεύουν τους 10 τύπους του αριστερού μέλους, η «όλα αληθή» και η «όλα ψευδή». Η πρώτη όμως αληθεύει την πρώτη παρένθεση του δεύτερου μέλους, και η δεύτερη, την δεύτερη. Άρα η ταυτολογική συνεπαγωγή ισχύει.

4. (15 μον.) Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα με σύμπαν το σύνολο των ανθρώπων, η οποία είναι εφοδιασμένη με τα κατηγορήματα $\Phi(x)$, $M(x)$, $\Pi(x)$, $\Delta(x)$ και $\Theta(x, y)$ με ερμηνείες «ο x είναι φοιτητής», «ο x είναι μουσικός», «ο x είναι πολιτικός», «ο x είναι δικηγόρος» και «ο x θαυμάζει τον y», αντίστοιχα. Δώστε τύπους σε αυτή τη γλώσσα που να δηλώνουν τις ακόλουθες προτάσεις:

   i. Υπάρχουν δικηγόροι που είναι και πολιτικοί.

   ii. Μερικοί φοιτητές θαυμάζουν μόνο μουσικούς.

   iii. Αν ένας φοιτητής είναι και μουσικός, τότε δεν θαυμάζει κανένα πολιτικό.

Απάντηση

   i. $\exists x(\Delta(x) \wedge \Pi(x))$

   ii. $\exists x \exists y(\Phi(x) \wedge M(y) \wedge \Theta(x, y) \wedge \forall z(\Theta(x, z) \to M(z)))$

   iii. $\forall x(\Phi(x) \wedge M(x) \to \forall y(\Theta(x, y) \to \neg\Pi(y)))$

5. (15 μον.) Ασχολούμαστε με τους αναγραμματισμούς της λέξης MISSISSIPPI.

   i. Υπολογίστε τον αριθμό των αναγραμματισμών αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

   ii. Υπολογίστε τον αριθμό των αναγραμματισμών όπου όμοια γράμματα πρέπει υποχρεωτικά να είναι σε διαδοχικές θέσεις.

   iii. Υπολογίστε τον αριθμό των αναγραμματισμών της λέξης αν τα I πρέπει να παραμείνουν στις θέσεις τους (δηλαδή στις θέσεις 2, 5, 8 και 11 της αναγραμματισμένης λέξης).

Απάντηση

   i. Πρόκειται για μεταθέσεις ομάδων μη διακεκριμένων αντικειμένων μέσα σε κάθε ομάδα. Υπάρχει η ομάδα των «S» με 4 στοιχεία, η ομάδα των «I» με 4 στοιχεία, η ομάδα των «P» με 2 στοιχεία και η ομάδα του «M» με 1 στοιχείο. Οι τρόποι είναι λοιπόν $\frac{11!}{4!4!2!}$.

   ii. Θεωρούμε ένα σύνολο όμοιων γραμμάτων σαν ένα αντικείμενο, οπότε έχουμε τις μεταθέσεις 4 αντικειμένων που είναι $4!$.

   iii. Σε αυτή την περίπτωση κρατάμε τα 4 «I» σταθερά και στις υπόλοιπες 7 θέσεις μεταθέτουμε με ανάλογο τρόπο όπως στο (i) τα υπόλοιπα γράμματα. Οι τρόποι είναι $\frac{7!}{4!2!}$.

6. (10 μον.) Έστω A ένα σύνολο με $2n+1$ στοιχεία. Δείξτε ότι το πλήθος των υποσυνόλων του A με λιγότερα από τα μισά στοιχεία (δηλ. αυτά που έχουν από 0 μέχρι n στοιχεία), είναι 2^{2n}.

   Απάντηση

   Ισχύει ότι $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ για $0 \leq k \leq n$. Συνεπώς από την γνωστή ταυτότητα του πλήθους των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία, $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$, έχουμε για το σύνολο με τα $2n+1$ στοιχεία $2^{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} = 2\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i}$. Το δεύτερο άθροισμα είναι ακριβώς το πλήθος των υποσυνόλων του A με λιγότερα από τα μισά στοιχεία και άρα $\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} = 2^{2n}$.

7. (10 μον.) Πόσες λέξεις n ψηφίων από το αλφάβητο $\{0, 1, 2\}$ υπάρχουν, όπου κάθε ψηφίο εμφανίζεται τουλάχιστον 1 φορά;

   Απάντηση

   Έστω N το σύνολο των λέξεων από αυτό το αλφάβητο. Έχουμε $|N| = 3n$. Συμβολίζουμε με $c_i,\ 0 \leq i \leq 2$ το σύνολο των λέξεων του N που ΔΕΝ περιέχουν το ψηφίο i. Ζητάμε τον πληθάριθμο του $\overline{c_0}\,\overline{c_1}\,\overline{c_2}$. Έχουμε ότι $|c_i| = 2^n$ και ότι $|c_i c_j| = 1,\ 0 \leq i < j \leq 2, |c_0 c_1 c_2| = 0$. Εφαρμόζουμε την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού και έχουμε

   $|\overline{c_0}\,\overline{c_1}\,\overline{c_2}| = |N| - |c_0| - |c_1| - |c_2| + |c_0 c_1| + |c_0 c_2| + |c_1 c_2| - |c_0 c_1 c_2| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$

8. (20 μον.) Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε τον όρο της συνάρτησης, ο συντελεστής του οποίου δίνει το πλήθος των ακέραιων και μη αρνητικών λύσεων της παρακάτω εξίσωσης (δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον συντελεστή).

   $$x + 2y + 3z = n$$

   Απάντηση

   Εισάγουμε τις μεταβλητές x_2 και x_3 όπου $x_2 = 2y$ και $x_3 = 3z$ και ζητάμε τις ακέραιες και μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης $x + x_1 + x_2 = n$ με τους περιορισμούς η x_2 να είναι πολλαπλάσια του 2 και η x_3 πολλαπλάσια του 3. Κατά τα γνωστά η γεννήτρια συνάρτηση που δίνει το πλήθος των λύσεων αυτής της εξίσωσης είναι

   $$(1 + u + u^2 + \cdots + u^n)(1 + u^2 + u^4 + \cdots + u^{2\lceil n/2 \rceil})(1 + u^3 + u^6 + \cdots + u^{3\lceil n/3 \rceil})$$

   Σε αυτή αναζητούμε τον συντελεστή του u^n.