Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:.. ....
(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2022

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Ν. Ρεκατσίνας

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Το K_{30} έχει κύκλο Euler.
   ii. Σε κάθε συνεκτικό γράφημα G, υπάρχει υπογράφημα του G με τουλάχιστον 3 κορυφές που έχει κύκλο Euler.
   iii. Ένα γράφημα με n κορυφές που έχει κύκλο Euler και κύκλο Hamilton έχει τουλάχιστον n ακμές.
   iv. Το C_4 (κύκλος 4 κορυφών) είναι επαγόμενο υπογράφημα του $K_{4,4}$.
   v. Υπάρχει γράφημα με ακμή γέφυρα που είναι και ακμή κύκλου.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Ο βαθμός κάθε κορυφής είναι 29, δηλαδή περιττός.
   ii. Ψευδής. Ένα ακυκλικό συνεκτικό γράφημα δεν περιλαμβάνει κανένα κύκλο άρα και κύκλο Euler.
   iii. Αληθής. Εφόσον το γράφημα έχει κύκλο Hamilton, θα έχει τουλάχιστον τόσες ακμές όσες κορυφές.
   iv. Αληθής. Ένας C_4 περιλαμβάνει δύο οποιεσδήποτε κορυφές του ενός μέρους και δύο του δευτέρου με τις κατάλληλες ακμές. Προφανώς είναι επαγόμενο υπογράφημα.
   v. Ψευδής. Μία ακμή είναι γέφυρα αν και μόνο αν δεν περιλαμβάνεται δε κάποιο κύκλο.

2. (10 μον.) Αριθμούμε τις 5 κορυφές του κύκλου C_5 σαν v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 με την φορά των δεικτών του ρολογιού και έστω A ο πίνακας γειτνίασης του (με αυτή την αρίθμηση). (i) Δώστε τον πίνακα γειτνίασης A και (ii) υπολογίστε τον πίνακα A^2 χωρίς να κάνετε τον πολλαπλασιασμό.

   Απάντηση

   Ο πίνακας γειτνίασης του C_5 φαίνεται παρακάτω αριστερά. Για τον υπολογισμό του A^2, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα ότι στην θέση (i, j) του πίνακα A^k υπάρχει το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων μήκους k του γραφήματος από την κορυφή i στην κορυφή j. Οπότε στην διαγώνιο του A^2 στην θέση (i, i) θα υπάρχει το πλήθος των περιπάτων μήκους 2 από την v_i στον εαυτό της (είναι 2), στις θέσεις (i, j) όπου v_i και v_j είναι γειτονικές κορυφές θα είναι 0, και στις θέσεις (i, j) όπου οι v_i και v_j απέχουν απόσταση 2, θα είναι 1. Ο πίνακας A^2 φαίνεται κάτω δεξιά.

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A^2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. (10 μον) *Δείξτε με επαγωγή ως προς το πλήθος των ακμών* (όχι με άλλο τρόπο) ότι για οποιοδήποτε μη κατευθυντικό γράφημα G (όχι απαραίτητα απλό) με n κορυφές και m ακμές, ισχύει το Λήμμα της Χειραψίας: $d_G(v_1) + \cdots + d_G(v_n) = 2m$ όπου $d_G(u)$ ο βαθμός της κορυφής u στο G.

   Απάντηση

   Βάση. Για $m = 0$, ο βαθμός κάθε κορυφής είναι 0 (αφού δεν υπάρχουν ακμές), οπότε ισχύει.

   Υπόθεση. Έστω ότι το Λήμμα της Χειραψίας ισχύει για οποιοδήποτε γράφημα με $m \geq 0$ ακμές.

   Βήμα. Έστω $G = (V, E)$ γράφημα με $m+1$ ακμές. Αφαιρούμε από το G μία τυχαία ακμή. Το γράφημα G' που απομένει έχει m ακμές άρα από την υπόθεση $\sum_{v \in V} d_{G'}(v) = 2m$. Αν η ακμή που αφαιρέσαμε έχει άκρα τις κορυφές u και v, τότε στο G' οι βαθμοί των u και v είναι κατά ένα μικρότεροι από ότι στο G. Συνεπώς $\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} d_{G'}(v) + 2 = 2m + 2 = 2(m+1)$. Αν η ακμή που αφαιρέσαμε είναι ανακύκλωση στην κορυφή u, τότε η αφαίρεση της μειώνει τον βαθμό της u κατά 2. Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση $\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{v \in V} d_{G'}(v) + 2 = 2m + 2 = 2(m + 1)$.

4. (15 μον.) Έστω f ικανοποιήσιμος τύπος και g ταυτολογία. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.

   i. Ο τύπος $f \vee g$ είναι ταυτολογία.
   ii. Ο τύπος $f \wedge g$ είναι ταυτολογία.
   iii. Ο τύπος $f \to g$ είναι ταυτολογία.
   iv. $\neg f \vdash g$
   v. $f \vee g \vdash \neg g$

   Απάντηση

   i. Αληθής. Η g είναι ταυτολογία
   ii. Ψευδής. Είναι απλώς ικανοποιήσιμος.
   iii. Αληθής. Το συμπέρασμα είναι πάντα αληθές.
   iv. Αληθής. Μία ταυτολογία είναι τυπικό θεώρημα, άρα αποδεικνύεται χωρίς επιπλέον υποθέσεις.
   v. Ψευδής. Ο αποδεικτέος τύπος είναι αντίφαση άρα αποδεικνύεται μόνο αν οι υποθέσεις είναι αντιφατικές.

5. (10 μον.) Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα η οποία είναι εφοδιασμένη με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο "$\leq$" και με το διθέσιο συναρτησιακό συμβολο "*". Στη γλώσσα αυτή θεωρούμε την δομή $\mathcal{N}$ στους φυσικούς αριθμούς και την δομή $\mathcal{R}$ στους πραγματικούς. Και στις δύο δομές το "$\leq$" έχει την συνήθη ερμηνεία και το "*" ερμηνεύεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Δώστε (i) ένα τύπο που να δηλώνει «κάθε στοιχείο του συνόλου έχει τετραγωνική ρίζα» και (ii) έναν τύπο που να δηλώνει «στο σύνολο υπάρχει ελάχιστο στοιχείο». Σε ποιά(ες) δομές από τις $\mathcal{N}$ και $\mathcal{R}$ επαληθεύονται οι τύποι που γράψατε;

Απάντηση

   i. $\forall x \exists y (y * y \approx x)$. Ο τύπος προφανώς δεν ισχύει ούτε στο $\mathbb{N}$ ούτε στο $\mathbb{R}$.
   ii. $\exists x \forall y (x \leq y)$. Ο τύπος ισχύει μόνο στο $\mathbb{N}$.

6. (10 μον.) Μια στρατιωτική φάλαγγα 16 αυτοκινήτων αποτελείται από 5 πανομοιότυπα τζιπ, 3 πανομοιότυπα μικρά φορτηγά και 8 πανομοιότυπα μεγάλα φορτηγά. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η φάλαγγα αν:

   i. δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
   ii. για λόγους ασφαλείας είναι απαραίτητο ακριβώς μπροστά από ένα μικρό φορτηγό να υπάρχει ένα τζιπ.

Απάντηση

   i. Αν δεν υπάρχει περιορισμός έχουμε μεταθέσεις ομάδων μη διακεκριμένων αντικειμένων μέσα στην κάθε ομάδα, οπότε οι τρόποι είναι $\frac{16!}{5!3!8!}$.
   ii. Θεωρούμε ένα τζιπ και ένα μικρό φορτηγό σαν ένα αντικείμενο οπότε έχουμε τώρα 3 νέα αντικείμενα (τα ζευγάρια τζιπ-μικρό φορτηγό), 2 τζιπ και 8 μεγάλα φορτηγά. Η απάντηση όπως προηγουμένως είναι $\frac{13!}{3!2!8!}$.

7. (15 μον.) Πόσα passwords με 15 χαρακτήρες μπορούμε να κατασκευάσουμε με τα 26 μικρά λατινικά γράμματα, τα 10 αριθμητικά ψηφία και τα σύμβολα \$ και & αν:

   i. Δεν υπάρχει κανένας άλλος περιορισμός.
   ii. Πρέπει να υπάρχουν στο password 10 γράμματα, 4 ψηφία και ένα από τα σύμβολα \$ και &.

Απάντηση

   i. Έχουμε συνολικά $26 + 10 + 2 = 38$ χαρακτήρες οπότε τα διαφορετικά passwords είναι 38^{15} (διατάξεις με επανάληψη).
   ii. Επιλέγουμε με $\binom{15}{4}$ τρόπους τις θέσεις των ψηφίων στο password και με $15 - 4 = 11$ τρόπους την θέση του ειδικού χαρακτήρα. Συνεπώς τα passwords είναι τώρα $26^{10} \cdot \binom{15}{4} \cdot 10^4 \cdot 11 \cdot 2$.

8. (10 μον.) Πόσοι διαφορετικοί πίνακες αληθείας υπάρχουν ορισμένοι σε 3 προτασιακές μεταβλητές; Για να διαφέρουν δύο πίνακες, πρέπει σε μία τουλάχιστον γραμμή ο ένας να έχει «Α» και ο άλλος «Ψ».

Απάντηση

Ένας πίνακας αληθείας σε 3 μεταβλητές έχει $2^3 = 8$ γραμμές και προσδιορίζεται από τις γραμμές που έχει «Α». Συνεπώς οι διαφορετικοί πίνακες είναι όσοι τα διαφορετικά υποσύνολα των 8 γραμμών δηλαδή 2^8.

9. (20 μον.) Θέλουμε να μοιράσουμε 25 όμοιες σοκολάτες σε 7 παιδιά με τον περιορισμό ότι το πρώτο παιδί δεν μπορεί να πάρει πάνω από 10 σοκολάτες.

   i. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνατε τον όρο ο συντελεστής του οποίου δίνει απάντηση στο ερώτημα αυτό. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον συντελεστή.

   ii. Λύστε το πρόβλημα χωρίς την χρήση γεννήτριας συνάρτησης.

   Απάντηση

   i. Ο απαριθμητής για το πρώτο παιδί είναι $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})$ ενώ για κάθε ένα από τα υπόλοιπα παιδιά είναι $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{25})$. Η γεννήτρια είναι συνεπώς η

   $$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{25})^6$$

   και σε αυτή αναζητάμε τον συντελεστή του x^{25}.

   ii. Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός θα διανέμαμε 25 όμοια αντικειμένα σε 7 διακεκριμένες υποδοχές. Οι τρόποι θα ήταν $\binom{25+7-1}{25} = \binom{31}{25}$. Οι τρόποι διανομής που παραβιάζουν τον περιορισμό προκύπτουν αν δώσουμε 11 σοκολάτες στο πρώτο παιδί και στην συνέχεια διανείμουμε τις υπόλοιπες 14 σοκολάτες σε όλα τα παιδιά (και στο πρώτο) χωρίς περιορισμούς. Οι τρόποι είναι όπως παραπάνω $\binom{20}{14}$. Άρα οι τρόποι που πληρούν τον περιορισμό είναι $\binom{31}{25} - \binom{20}{14}$.