Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:.. ....
(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2022

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας - Ν. Ρεκατσίνας

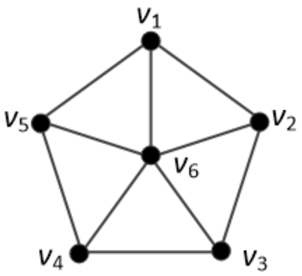
1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Το πλήθος των άσσων στον πίνακα γειτνίασης κάθε απλού μη κατευθυντικού γραφήματος είναι άρτιο.
   ii. Κάθε γράφημα που έχει και κύκλο Euler και κύκλο Hamilton είναι διμερές.
   iii. Το γράφημα K_{2022} έχει κύκλο Euler.
   iv. Το μη επίπεδο γράφημα με τις λιγότερες ακμές είναι το K_5.
   v. Σε κάθε συνεκτικό επίπεδο γράφημα με τουλάχιστον 2 κορυφές, υπάρχει μία ακμή που είναι σύνορο δύο διαφορετικών όψεων.

   Απάντηση

   i. Αληθής. Ο πίνακας γειτνίασης είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο η οποία έχει μόνο 0.
   ii. Ψευδής. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το K_3 (ένα «τρίγωνο»).
   iii. Ψευδής. Το K_{2022} είναι ένα 2021-κανονικό γράφημα, δηλαδή κάθε κορυφή του έχει περιττό βαθμό.
   iv. Ψευδής. Είναι το $K_{3,3}$ που έχει 9 ακμές ενώ το K_5 10.
   v. Ψευδής. Το K_2 έχει μια ακμή που είναι σύνορο μόνο της εξωτερικής όψης.

2. (10 μον.) Στο παρακάτω γράφημα:



   i. Δείξτε ότι υπάρχουν 3 ακμές που αν αφαιρεθούν, στο γράφημα που προκύπτει όλοι οι κύκλοι έχουν άρτιο μήκος.

ii. Δείξτε ότι δεν μπορεί να προκύψει γράφημα του οποίου όλοι οι κύκλοι είναι άρτιοι, αν αφαιρεθούν λιγότερες από 3 ακμές.

Απάντηση

i. Ένα τέτοιο σύνολο 3 ακμών είναι π.χ. το $\{v_4v_3, v_5v_6, v_6v_2\}$. Στο υπολειπόμενο γράφημα κάθε κύκλος είναι άρτιος.

ii. Έστω ότι υπάρχουν 2 ακμές που η αφαίρεση τους δίνει γράφημα χωρίς περιττό κύκλο. Στο γράφημα υπάρχει ο εξωτερικός κύκλος μήκους 5 καθώς και 5 τρίγωνα. Για να καταστραφεί λοιπόν ο εξωτερικός κύκλος πρέπει να φύγει μία τουλάχιστον εξωτερική ακμή. Δεν μπορεί και η δεύτερη ακμή να είναι εξωτερική διότι τότε δεν καταστρέφονται όλα τα τρίγωνα. Άρα θα πρέπει να είναι εσωτερική ακμή. Όμως δεν υπάρχει τρόπος με την αφαίρεση μιας μόνο ακμής να καταστραφούν όλα τα τρίγωνα. Άτοπο.

3. (10 μον) Έστω G συνεκτικό επίπεδο γράφημα με n κορυφές του οποίου κάθε όψη έχει βαθμό (μήκος) k. Δείξτε ότι το G έχει $k(n-2)/(k-2)$ ακμές.

   Απάντηση

   Έστω m το πλήθος των ακμών και f το πλήθος των όψεων του γραφήματος. Δίδεται όμως ότι ο βαθμός κάθε όψης είναι k. Από το Λήμμα της Χειραψίας για τους βαθμούς των όψεων έχουμε λοιπόν $f \cdot k = 2m$. Αντικαθιστώντας το f από τον τύπο του Euler, $n + f = m + 2$, έχουμε το ζητούμενο.

4. (15 μον.) Στα παρακάτω ερωτήματα οι p_1, p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές, οι φ και ψ προτασιακοί τύποι και τα T_1, T_2 σύνολα προτασιακών τύπων. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.

   i. Ο τύπος $(p_1 \leftrightarrow p_1) \leftrightarrow p_1$ είναι ταυτολογία.

   ii. Υπάρχει μία μόνο αποτίμηση των p_1, p_2 που δεν ικανοποιεί τον τύπο $(p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_2$.

   iii. Αν τα T_1 και T_2 είναι ικανοποιήσιμα, τότε είναι ικανοποιήσιμο και το σύνολο $T_1 \cup T_2$.

   iv. Η μεταβλητή x είναι δεσμευμένη στον τύπο $\forall x \forall z (P(x,y) \vee Q(x,y)) \vee \exists y P(x,y)$.

   v. $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \models \varphi$

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Όταν η p_1 είναι ψευδής, ο τύπος διαψεύδεται.

   ii. Ψευδής. Ο τύπος είναι ταυτολογία διότι αν $p_1 = p_2 = A$, ο τύπος επαληθεύεται.

   iii. Ψευδής. Τα δύο σύνολα τύπων μπορεί να επαληθεύονται σε διαφορετικές αποτιμήσεις.

   iv. Ψευδής. Η τελευταία εμφάνιση της x είναι ελεύθερη.

   v. Ψευδής. Ο τύπος αριστερά είναι ταυτολογία ενώ ο φ, όχι.

5. (15 μον.) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ δηλώνει ότι «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή». Σε αυτή την ερμηνεία δώστε έναν τύπο που να δηλώνει «Το γράφημα έχει συνεκτική συνιστώσα το K_3 (πλήρες γράφημα με 3 κορυφές)».

Απάντηση

Ο τύπος παρακάτω δηλώνει: «υπάρχουν 3 διαφορετικές κορυφές που ενώνονται μεταξύ τους και δεν ενώνονται με καμία άλλη».

$$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(z,x) \wedge$$
$$\forall w (w \neq x \wedge w \neq y \wedge w \neq z \rightarrow \neg P(w,x) \wedge \neg P(w,y) \wedge \neg P(w,z)))$$

6. (10 μον.) Στις ερχόμενες εκλογές, σε μια εκλογική περιφέρεια εκλέγονται 12 βουλευτές. Έστω ότι n ψηφοφόροι θα ψηφίσουν το κόμμα X. Με πόσους τρόπους μπορούν να ψηφιστούν οι 12 βουλευτές του κόμματος X αν κάθε ψηφοφόρος μπορεί να σταυρώσει 0 ή 1 υποψήφιο;

   Απάντηση

   Θεωρούμε ένα 13ο «βουλευτή» που αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο ψηφοφόρος δεν σταυρώνει κανένα βουλευτή. Οι διαφορετικές ψηφοφορίες είναι όσες οι ρίψεις n μη διακεκριμένων μπαλών σε 13 διακεκριμένες υποδοχές. Οι τρόποι είναι λοιπόν $\binom{n+13-1}{n} = \binom{n+12}{n}$.

7. (15 μον.) Ρίχνουμε ένα ζάρι k φορές και σημειώνουμε τα αποτελέσματα των ρίψεων (η σειρά έχει σημασία).

   i. Πόσες ακολουθίες ρίψεων περιλαμβάνουν τουλάχιστον 2 διαφορετικά αποτελέσματα ρίψεων;
   ii. Ποιά η πιθανότητα να εμφανιστούν στην ακολουθία αριθμοί μεγαλύτεροι του 3 (δηλαδή 4, 5 ή 6) τουλάχιστον 2 φορές;

   Απάντηση

   i. Όλες οι ακολουθίες είναι 6^k. Από αυτές πρέπει να εξαιρέσουμε όσες έχουν όλες τις ρίψεις ίδιες. Αυτές είναι προφανώς 6. Άρα $6^k - 6$ είναι οι ακολουθίες που περιλαμβάνουν τουλάχιστον 2 διαφορετικά αποτελέσματα.
   ii. Από το σύνολο των ακολουθιών αφαιρούμε αυτές που (i) όλοι οι αριθμοί που τις απαρτίζουν είναι μικρότεροι ή ίσοι του 3 και (ii) αυτές στις οποίες εμφανίζεται αριθμός μεγαλύτερος του 3 ακριβώς 1 φορά. Οι (i) είναι 3^k. Για να βρούμε τον αριθμό στην περίπτωση (ii), υπάρχουν 3 αριθμοί (οι 4, 5, 6) που κάποιος από αυτούς πρέπει να είναι στην ακολουθία ακριβώς 1 φορά. Οι πιθανές του θέσεις είναι k ενώ η υπόλοιπη ακολουθία μπορεί να συμπληρωθεί με 3^{k-1} τρόπους. Σύνολο λοιπόν $3 \times k \times 3^{k-1} = k3^k$. Άρα η πιθανότητα είναι $(6^k - 3^k - k3^k)/6^k = 1 - (k+1)2^{-k}$.

8. (10 μον.) Ανάμεσα σε 1000 φοιτητές, 400 θα δώσουν εξετάσεις στα Διακριτά Μαθηματικά, 300 Απειροστικό Ι και 200 Γραμμική Άλγεβρα. Υπάρχουν 200 που θα δώσουν 2 μαθήματα (οποιαδήποτε) και 100 που θα δώσουν και τα 3. Πόσοι φοιτητές δεν θα δώσουν κανένα μάθημα;

   Απάντηση.

   Εφαρμόζουμε Εγκλεισμό-Αποκλεισμό. Αν C_1, C_2, C_3 τα σύνολα των φοιτητών που θα δώσουν Διακριτά Μαθηματικά, Γραμμική Άλγεβρα και Απειροστικό Ι, αντίστοιχα, ζητάμε τον πληθάριθμο του συνόλου $\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_2}$. Με βάση τον τύπο του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

$$|\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_2}| = |N| - |C_1| - |C_2| - |C_3| + |C_1C_2| + |C_2C_3| + |C_1C_3| - |C_1C_2C_3|$$

Όμως το άθροισμα των τομών ανά 2 είναι 200 και συνεπώς: $|\overline{C_1}\,\overline{C_2}\,\overline{C_2}| = 1000 - 400 - 300 - 200 + 200 - 100 = 200$.

9. (15 μον.) Σε ένα τεστ ποιοτικού ελέγχου, ένας δρομολογητής δικτύου (router), δρομολογεί μη διακεκριμένα δικτυακά «πακέτα» προς τρία διαφορετικά κανάλια. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ένα τεστ δρομολόγησης 100 πακέτων αν το πρώτο κανάλι έχει «άπειρη» χωρητικότητα, το δεύτερο χωρητικότητα 80 πακέτων ενώ το τρίτο 100 πακέτων και πρέπει να αποσταλούν δέκα τουλάχιστον πακέτα σε κάθε κανάλι; Να σχηματιστεί η γεννήτρια συνάρτηση για το πρόβλημα και να επισημανθεί η δύναμη του x ο συντελεστής της οποίας δίνει τη σωστή απάντηση. Στην συνέχεια να υπολογιστεί η τιμή του συντελεστή.

Απάντηση

Οι απαριθμητές είναι $(x^{10} + x^{11} + \cdots)$ για το πρώτο κανάλι, $(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{80})$ για το δεύτερο και $(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{100})$ για το τρίτο.

Συνεπώς η ΓΣ είναι $(x^{10} + x^{11} + \cdots)(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{80})(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{100})$ ή αλλιώς $x^{30}(1 + x + \cdots)(1 + x + \cdots + x^{70})(1 + x + \cdots + x^{90})$. Σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{100}.

Ισοδύναμα, ζητάμε τον συντελεστή του x^{70} στην συνάρτηση $(1+x+\cdots)(1+x+\cdots+x^{70})(1+x+\cdots+x^{90})$.

Μπορούμε συνεπώς να πάμε τους εκθέτες όλων των απαριθμητών στο άπειρο, μια και εκθέτες μεγαλύτεροι του 70 δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα. Άρα ζητάμε τον συντελεστή του x^{70} στην παράσταση $(1 - x)^{-3}$. Έχουμε λοιπόν:

$$(1 - x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n + 3 - 1}{n} x^n$$

Άρα ο ζητούμενος συντελεστής βρίσκεται για $n = 70$ και είναι $\binom{72}{70}$.