Ονοματεπώνυμο:.. ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2019

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών (4, 2, 2, 2, 1, 1).

   ii. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα 15 κορυφών, 20 ακμών που έχει επίπεδη αποτύπωση με 7 όψεις.

   iii. Υπάρχει γράφημα με n κορυφές και n–1 ακμές το οποίο περιέχει κύκλο.

   iv. Αν n και m είναι άρτιοι αριθμοί τότε το $K_{n,m}$ έχει κύκλο Hamilton.

   v. Ο πίνακας γειτνίασης του πλήρους γραφήματος $K_n, n \geq 2$ περιλαμβάνει μόνο 1.

   Απάντηση

   i. Αληθής. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο ελέγχου της δοθείσας ακολουθίας, έχουμε διαδοχικά:
   $422211 \to 11101 \equiv 11110 \to 0110 \equiv 1100$
   Η τελευταία είναι προφανώς γραφική ακολουθία, άρα και η αρχική είναι επίσης.

   ii. Αληθής. Οι δοθείσες τιμές επαληθεύουν τον τύπο του Euler για τα συνεκτικά επίπεδα γραφήματα. Στην συνέχεια, είναι εύκολο να σχεδιαστεί ένα επίπεδο γράφημα με αυτές τις παραμέτρους. Για παράδειγμα μπορούν αρχικά να σχεδιαστούν δύο «ομόκεντροι» κύκλοι των 10 και 5 κορυφών (που έχουν μαζί 15 ακμές) και στην συνέχεια μπορούν να προστεθούν άλλες 5 ακμές μεταξύ των κύκλων ώστε να δημιουργηθεί επίπεδο γράφημα με 7 όψεις.

   iii. Αληθής. Το γράφημα όμως πρέπει να είναι μη συνεκτικό. Αν ήταν συνεκτικό, θα ήταν δένδρο, άρα δεν θα περιείχε κύκλο.

   iv. Ψευδής. Πρέπει $n = m \geq 2$ ώστε να υπάρχει κύκλος Hamilton, μια και ο κύκλος θα περνά εναλλάξ από κορυφές των δύο μερών του γραφήματος.

   v. Ψευδής. Στην διαγώνιο πρέπει να έχει 0. Οπουδήποτε αλλού θα έχει 1.

2. (10 μον.) Δείξτε ότι ένα δένδρο με $n \geq 2$ κορυφές, περιέχει σύνολο ανεξαρτησίας με μέγεθος τουλάχιστον $n/2$.

   Απάντηση

   Ένα δένδρο είνα διμερές γράφημα άρα ένα από τα δύο μέρη του θα έχει μέγεθος τουλάχιστον $n/2$.

3. (10 μον.) Έστω G απλό επίπεδο γράφημα με n κορυφές και m ακμές. Δείξτε ότι $m \leq 3n - 6$. Στην συνέχεια δείξτε ότι η ισότητα ισχύει όταν κάθε όψη του G είναι τρίγωνο.

   Απάντηση

   Θεωρία. Δείτε τις διαφάνειες τις σχετικές με την επιπεδότητα.

4. (15 μον.) Στους παρακάτω τύπους τα χ, ψ και φ είναι προτασιακοί τύποι. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Αν $\varphi \models \chi$ και $\chi \models \neg\psi$, τότε ο τύπος $\varphi \to \chi \wedge \psi$ δεν είναι ικανοποιήσιμος.
   ii. Αν $\varphi \models \chi$ και $\chi \models \psi$, τότε ο τύπος $\varphi \to \chi \wedge \psi$ είναι ταυτολογία
   iii. $\chi \wedge \psi \models \varphi \to \psi$.
   iv. $(\varphi \to \psi) \to \varphi \models \neg\varphi \to \varphi$.
   v. Αν ο χ δεν είναι ταυτολογία, τότε ο $(\varphi \vee \neg\varphi) \to \chi$ είναι ταυτολογία.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Όταν ο φ είναι ψευδής και οι ταυτολογικές συνεπαγωγές της υπόθεσης ισχύουν αλλά και ο $\varphi \to \chi \wedge \psi$ ικανοποιείται επίσης.
   ii. Αληθής. Όπως παραπάνω, αν φ αληθής είναι αληθείς επίσης και οι χ και ψ, άρα ο τύπος $\varphi \to \chi \wedge \psi$ αληθεύει. Αληθεύει επίσης προφανώς και όταν φ ψευδής.
   iii. Αληθής. Όταν το αριστερό μέλος αληθεύει τότε ο ψ είναι αληθής. Τότε όμως αληθεύει και το δεξί μέλος.
   iv. Αληθής. Το δεξί μέλος διαψεύδεται όταν φ είναι ψευδής. Τότε όμως είναι ψευδές και το αριστερό μέλος.
   v. Ψευδής. Η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι ταυτολογία. Άρα στις περιπτώσεις που ο χ διαψεύδεται, διαψεύδεται και όλος ο τύπος.

5. (15 μον.) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα που περιέχει ένα κατηγορηματικό σύμβολο G. Ερμηνεύουμε τη γλώσσα αυτή σε απλά, μη κατευθυνόμενα γραφήματα όπου οι μεταβλητές ερμηνεύονται ως οι κορυφές των γραφημάτων και το $G(x, y)$ αληθεύει αν οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή. Στην γλώσσα αυτή να γράψετε προτάσεις που να δηλώνουν:

   i. Στο γράφημα υπάρχει απομονωμένη κορυφή (δηλαδή κορυφή βαθμού 0).
   ii. Κάθε κορυφή που συμμετέχει σε κύκλο μήκους 3 έχει βαθμό τουλάχιστον 3.

   Απάντηση

   i. $\varphi = \exists x \forall y \neg G(x, y)$
   ii. Ο παρακάτω τύπος δηλώνει ότι η κορυφή x έχει βαθμό τουλάχιστον 3.
   $\varphi_1(x) = \exists y \exists z \exists w(x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq w \wedge y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge G(x, y) \wedge G(x, z) \wedge G(x, w))$
   Χρησιμοποιώντας αυτό τον τύπο γράφουμε την ζητούμενο πρόταση:
   $\psi = \forall x(\exists u \exists v(x \neq u \wedge x \neq v \wedge u \neq v \wedge G(x, u) \wedge G(u, v) \wedge G(v, u)) \to \varphi_1(x))$

6. (10 μον.) 50 φοιτητές χωρίζονται σε 10 πενταμελείς ομάδες για το εργαστήριο φυσικής. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χωρισμός στις παρακάτω περιπτώσεις;

   i. Αν κάθε ομάδα εξασκείται σε διαφορετική άσκηση.

   ii. Αν όλες οι ομάδες εξασκούνται στην ίδια άσκηση.

   iii. Αν 3 από τις ομάδες εξασκούνται στην ίδια άσκηση και οι υπόλοιπες 7 σε διαφορετικές (και μεταξύ τους και με την άσκηση των 3).

   Απάντηση

   i. Πρόκειται για μεταθέσεις 50 αντικειμένων που χωρίζονται σε 10 πενταμελείς ομάδες. Οι τρόποι είναι $\frac{50!}{(5!)^{10}}$.

   ii. Σε αυτή την περίπτωση η παραπάνω ποσότητα πρέπει να διαιρεθεί με το 10! διότι τώρα δεν υπάρχει διάταξη μεταξύ των ομάδων. (Δεν διακρίνονται οι ομάδες σε 1η, 2η κλπ.). Άρα οι τρόποι είναι $\frac{50!}{(5!)^{10}10!}$.

   iii. Τώρα έχουμε 10 ομάδες όπου οι 3 είναι μη διακεκριμένες μεταξύ τους αλλά διακεκριμένες με τις υπόλοιπες 7. Ο τύπος του (i) έχει συνεπώς βάλει διάταξη στις 3 ομάδες (και η οποία πρέπει να αναιρεθεί διαιρώντας με το 3!). Οι τρόποι είναι λοιπόν $\frac{50!}{(5!)^{10}3!}$.

7. (10 μον.) Από μία τράπουλα 52 χαρτιών επιλέγουμε τυχαία 5 χαρτιά. Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν τουλάχιστον 3 άσσοι στην πεντάδα μας; (Σε μία τράπουλα υπάρχουν 4 άσσοι.)

   Απάντηση

   Το σύνολο πεντάδων είναι $\binom{52}{5}$. Οι ευνοϊκές πεντάδες σχηματίζονται με (i) επιλέγοντας με 4 τρόπους τους τους 3 άσσους και στην συνέχεια 2 χαρτιά από τα υπόλοιπα 48. Οι επιλογές είναι συνεπώς $4\binom{48}{2}$. (ii) Επιπλέον μπορούμε να έχουμε και τους 4 άσσους στην πεντάδα οπότε έχουμε 48 επιλογές για να συμπληρωθεί η πεντάδα. Συνολικά λοιπόν οι ευνοϊκές πεντάδες είναι $48 + 4\binom{48}{2}$. Η ζητούμενη πιθανότητα λοιπόν είναι $\frac{48+4\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}}$.

8. (15 μον.) Θεωρούμε τις ακολουθίες μήκους n με τα ψηφία 0,1,2.

   i. Πόσες είναι όλες οι ακολουθίες αν δεν υπάρχει περιορισμός;

   ii. Πόσες είναι όλες οι ακολουθίες που δεν περιλαμβάνουν το 0;

   iii. Χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού καθώς και τα υποερωτήματα (i) και (ii), υπολογίστε πόσες είναι όλες οι ακολουθίες μήκους n που περιλαμβάνουν τουλάχιστον μία φορά κάθε ψηφίο από τα 0,1,2.

   Απάντηση

   i. $N = 3^n$. (Διατάξεις με επανάληψη.)

   ii. 2^n.

   iii. Έστω $c_i, i = 0, 1, 2$ το σύνολο των ακολουθιών μήκους n που *δεν* περιλαμβάνουν το ψηφίο i. Από το (ii) έχουμε $c_i = 2^n, i = 0, 1, 2$. Επίσης, $c_i c_j = 1$ για $0 \leq i < j \leq 2$ επειδή υπάρχει προφανώς μόνο μία ακολουθία μήκους n που δεν περιλαμβάνει δύο από τα ψηφία 0,1,2. Τέλος, $c_0c_1c_2 = 0$. Τελικά, χρησιμοποιώντας την αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, οι ακολουθίες μήκους n που περιλαμβάνουν τουλάχιστον μία φορά κάθε ψηφίο από τα 0,1,2 είναι

$$\overline{c_0}\,\overline{c_1}\,\overline{c_2} = N - c_0 - c_1 - c_2 + c_0c_1 + c_0c_2 + c_1c_3 - c_0c_1c_2 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

9. (10 μον.) Ένας υποψήφιος βουλευτής μοίρασε 100 διαφημιστικά φυλλάδια σε 4 εκλογικά κέντρα έτσι ώστε σε κάθε κέντρο να δοθούν τουλάχιστον 20 και το πολύ 30 φυλλάδια. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε την δύναμη του x ο συντελεστής της οποίας δίνει το πλήθος των διαφορετικών διανομών.

   Απάντηση

   Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$(x^{20} + x^{21} + \cdots + x^{30})^4$$

   Στην παράσταση αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{100}.