Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:.. ....
(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2019

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Το άθροισμα των στοιχείων της i-οστης γραμμής του πίνακα γειτνίασης ενός μη κατευθυντικού γραφήματος, είναι ίσο με το άθροισμα των στοιχείων της i-οστης στήλης.

   ii. Όλες οι αποτυπώσεις επίπεδου γραφήματος έχουν ίδιο αριθμό όψεων.

   iii. Αν το T είναι δένδρο και ο μέγιστος βαθμός των κορυφών του είναι Δ, τότε το T έχει τουλάχιστον Δ φύλλα.

   iv. Αν για κάποιο γράφημα G, τόσο το G όσο και το συμπληρωματικό του έχουν κύκλο Euler, τότε το G πρέπει να έχει περιττό πλήθος κορυφών.

   v. Σε ένα απλό γράφημα αν αφαιρεθεί μία ακμή ενός κύκλου Hamilton το γράφημα που προκύπτει δεν έχει κύκλο Hamilton

   Απάντηση

   i. Αληθής. Κάθε ένα από τα δύο αθροίσματα ισούται με τον βαθμό της κορυφής i του γραφήματος.

   ii. Αληθής. Από τον τύπο του Euler $n + f = m + 2$ συνάγουμε ότι για δεδομένα n και m, το πλήθος των όψεων f προσδιορίζεται μονοσήμαντα.

   iii. Αληθής. Όλα τα μονοπάτια που ξεκινούν από μια κορυφή βαθμού Δ αναγκαστικά πρέπει να τελειώσουν σε ένα τουλάχιστον φύλλο.

   iv. Αληθής. Έστω d ο βαθμός μίας κορυφής στο G και d' στο συμπληρωματικό του $\overline{G}$. Τότε θα ισχύει $d + d' = n - 1$ και επειδή τόσο το d όσο και το d' είναι άρτιοι, το n θα πρέπει να είναι περιττός αριθμός.

   v. Ψευδής. Το γράφημα είναι δυνατό να είχε και άλλο κύκλο Hamilton που δεν χρησιμοποιούσε την συγκεκριμένη ακμή.

2. (10 μον.) Έστω απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$. Συμβολίζουμε με $\chi(G)$ τον χρωματικό αριθμό του G, και συμβολίζουμε με G_u το γράφημα που απομένει αν αφαιρέσουμε από το G την κορυφή u και όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή. Μετά την αφαίρεση της u επαναπροσδιορίζουμε τον χρωματικό αριθμό του καινούργιου γραφήματος G_u, έστω $\chi(G_u)$.

i. Να δείξετε ότι κάθε μη συνεκτικό γράφημα G έχει κορυφή u τέτοια ώστε $\chi(G_u) = \chi(G)$.

ii. Να δείξετε ότι αν για κάθε κορυφή u ενός γραφήματος G, $\chi(G_u) < \chi(G)$, τότε το γράφημα G είναι συνεκτικό.

Απάντηση

i. Επειδή το G είναι μη συνεκτικό, θα υπάρχει μία συνεκτική συνιστώσα του H που έχει χρωματικό αριθμό $\chi(H) = \chi(G)$. Επιλέγουμε την u από κάποια άλλη συνεκτική συνιστώσα εκτός της H. Προφανώς ο χρωματικός αριθμός της H δεν άλλαξε και συνεπώς $\chi(G_u) = \chi(H) = \chi(G)$.

ii. Αν δεν ήταν, τότε από το (i) θα υπήρχε κορυφή u τέτοια που $\chi(G_u) = \chi(G)$.

3. (10 μον.)) Έστω G διμερές γράφημα στο οποίο όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό $k \geq 2$.

   i. Δείξτε ότι και τα δύο μέρη του G έχουν ίδιο πλήθος κορυφών.

   ii. Δείξτε ότι στο G δεν μπορεί να υπάρχει γέφυρα.

   Υπόδειξη για το (ii): Αν η ακμή e ήταν γέφυρα τότε η αφαίρεση της θα έδινε δύο συνεκτικές συνιστώσες στο $G - e$. Εφαρμόστε μια παραλλαγή του (i) σε μία από αυτές.

   Απάντηση

   i. Έστω A και B τα δύο μέρη του γραφήματος. Τότε το πλήθος των ακμών του G μετρημένο από το A είναι $k|A|$ ενώ από το B $k|B|$. Προφανώς $k|A| = k|B|$ και άρα $|A| = |B|$.

   ii. Αν η ακμή e ήταν γέφυρα τότε η αφαίρεση της θα έσπαγε μία συνεκτική συνιστώσα του G σε δύο. Έστω H μία τέτοια συνιστώσα. Η H είναι επίσης διμερές γράφημα στο οποίο όλες οι κορυφές του στο ένα μέρος (έστω n_1 το πλήθος τους) έχουν βαθμό k ενώ στο άλλο μέρος (έστω n_2) έχουν όλες βαθμό k εκτός από μία (αυτή από την οποία αφαιρέθηκε η e). Μετρώντας όπως στο (i) της ακμές της συνιστώσας και από τα δύο μέρη και εξισώνοντας έχουμε $kn_1 = k(n_2 - 1) + k - 1$. Αυτή η σχέση δίνει $k(n_2 - n_1) = 1$ που δεν μπορεί να ισχύει για φυσικούς k, n_1, n_2.

4. (15 μον.) Στους παρακάτω τύπους τα p_1, p_2 είναι προτασιακές μεταβλητές. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   Απάντηση

   i. Ο τύπος $(p_1 \lor p_2) \to p_1$ είναι ταυτολογία.

   ii. Ο τύπος $(p_1 \land p_2) \to p_1$ είναι ταυτολογία.

   iii. Ο τύπος $(p_1 \land p_2) \to (p_1 \lor p_2)$ είναι ταυτολογία.

   iv. Ο τύπος $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_1 \land \neg p_2)$ είναι αντίφαση.

   v. $(p_1 \land \neg p_1) \to p_2 \models p_2$

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Ο τύπος διαψεύδεται όταν $p_1 = \Psi$ και $p_2 = A$.

   ii. Αληθής. Δεν μπορεί να ικανοποιηθεί η υπόθεση της συνεπαγωγής και να διαψευστεί το συμπέρασμα της.

iii. Αληθής. Ισχύει ότι στο (ii)

iv. Ψευδής. Όταν $p_1 = A$ και $p_2 = \Psi$ ο τύπος αληθεύει.

v. Ψευδής. Όταν $p_2 = \Psi$ το αριστερό μέλος είναι αληθές ενώ το δεξί ψευδές.

5. (15 μον.) Έστω $P(A)$ το δυναμοσύνολο (δηλαδή το σύνολο των υποσυνόλων) του πεπερασμένου συνόλου A. Στην δομή όπου σύμπαν είναι το $P(A)$ και η οποία είναι εφοδιασμένη με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q όπου $Q(x, y)$ ερμηνεύεται σαν «το σύνολο x είναι υποσύνολο του συνόλου y» δώστε τύπο φ με ερμηνεία «για οποιαδήποτε δύο σύνολα υπάρχει μοναδικό ελάχιστο (ως προς τον εγκλεισμό) σύνολο που είναι υπερσύνολο και των δύο» (ή αλλιώς, η ένωση δύο συνόλων είναι μοναδική).

Απάντηση

$$\forall x \forall y \exists z (Q(x, z) \land Q(y, z) \land \forall u (Q(x, u) \land Q(y, u) \to Q(z, u)))$$

6. (10 μον.) Στο ράφι μιας βιβλιοθήκης θα τοποθετηθούν 8 διαφορετικά βιβλία και 20 πανομοιότυπα τετράδια. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση τους στις παρακάτω περιπτώσεις;

i. Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

ii. Αν στην αρχή και στο τέλος της σειράς πρέπει να υπάρχει βιβλίο.

Απάντηση

i. Μία προσέγγιση είναι να τοποθετήσουμε τα 8 βιβλία με 8! τρόπους και στην συνέχεια τα 20 τετράδια στα κενά μεταξύ των βιβλίων και στην αρχή και στο τέλος της σειράς, δηλαδή σε 9 υποδοχές. Πρόκειται για τοποθέτηση 20 μη διακεκριμένων σφαιρών σε 9 διακεκριμένες υποδοχές. Αυτή γίνεται με $\binom{20+9-1}{20} = \binom{28}{20}$ τρόπους. Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $8!\binom{28}{20} = \frac{28!}{20!} = (28)_8$. Το τελευταίο αποτέλεσμα εναλλακτικά θα μπορούσε να προκύψει αν δούμε ότι έχουμε 28 θέσεις όπου θα τοποθετηθούν όλα τα αντικείμενα και για τα βιβλία επιλέγουμε 8 από αυτές και τις διατάσσουμε. Πρόκειται δηλαδή για διατάξεις των 28 ανά 8. Ακόμη μία εναλλακτική προσέγγιση θα ήταν να δούμε το πρόβλημα σαν διατάξεις ομάδων ομοίων αντικειμένων. Έχουμε 28 αντικείμενα από τα οποία τα 20 αποτελούν μία ομάδα και έχουμε και άλλες 8 μονομελείς ομάδες (τα βιβλία). Ο τύπος δίνει $\frac{28!}{20!(1!)^8} = (28)_8$.

ii. Επιλέγουμε και διατάσσουμε τα ακριανά βιβλία με $(8)_2$ τρόπους. Στην συνέχεια τοποθετούμε τα υπόλοιπα 6 βιβλία και τα 20 τετράδια όπως παραπάνω με $(26)_6$ τρόπους. Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $(8)_2(26)_6 = \frac{8!26!}{6!20!}$.

7. (15 μον.) Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων επιλέγουμε n σημεία στον άξονα x και στα σημεία αυτά φέρουμε καθέτους πάνω στον άξονα x. Παρόμοια, επιλέγουμε m σημεία στον άξονα y και πάνω σε αυτά φέρουμε τις καθέτους στον άξονα y. Πόσα παραλληλόγραμμα σχηματίζονται από τις τομές των n κάθετων ευθειών με τις m οριζόντιες; Οποιεσδήποτε δύο κάθετες ευθείες και οποιεσδήποτε δύο οριζόντιες ορίζουν ένα παραλληλόγραμμο.

Απάντηση

Από την τελευταία αυτή παρατήρηση, επιλέγουμε 2 σημεία στον άξονα x με $\binom{n}{2}$ τρόπους και 2 σημεία στον άξονα y με $\binom{m}{2}$ τρόπους. Συνολικά έχουμε $\binom{n}{2} \cdot \binom{m}{2}$ επιλογές σημείων και ευθείων και άρα αντίστοιχα παραλληλόγραμμα.

8. (10 μον.) Μία επιτροπή συγκροτείται από n γυναίκες και m άντρες. Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί η επιτροπή στις παρακάτω περιπτώσεις;

   i. Η επιτροπή περιλαμβάνει $k \leq n$ γυναίκες και αυθαίρετο αριθμό από άνδρες (δηλαδή από κανέναν μέχρι και όλους) και οι ρόλοι όλων των συμμετεχόντων στην επιτροπή είναι ισότιμοι, δηλαδή έχουν σημασία μόνο τα πρόσωπα που επιλέγονται.

   ii. Η επιτροπή περιλαμβάνει $k \leq n$ γυναίκες και $\ell \leq m$ άνδρες αλλά τώρα οι ρόλοι όλοι των συμμετεχόντων είναι διακριτοί, δηλαδή τώρα έχει σημασία και ο ρόλος κάθε επιλεγμένου προσώπου.

   Απάντηση

   i. Επιλέγουμε με $\binom{n}{k}$ τρόπους τις k γυναίκες και ένα οποιοδήποτε σύνολο ανδρών. Υπάρχουν 2^m υποσύνολα ανδρών οπότε συνολικά η επιτροπή συγκροτείται με $\binom{n}{k}2^m$ τρόπους.

   ii. Επιλέγουμε με $\binom{n}{k}$ τρόπους τις k γυναίκες και με $\binom{m}{\ell}$ τρόπους τους ℓ άνδρες. Στην συνέχεια στα $k+\ell$ επιλεγέντα άτομα ανατίθεται ένας ρόλος με $(k+\ell)!$ τρόπους. Η επιτροπή συνεπώς συγκροτείται με $\binom{n}{k}\binom{m}{\ell}(k+\ell)!$ τρόπους.

9. (10 μον.) Πόσες είναι οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1000$$

με τους περιορισμούς $0 \leq x_1$, $5 \leq x_2 \leq 10$, $10 \leq x_3 \leq 20$, $0 \leq x_4$; Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε την δύναμη ο συντελεστής της οποίας δίνει την απάντηση.

Απάντηση

Θέτουμε $y_1 = 3x_1, y_2 = 5x_2, y_3 = x_3$ και $y_4 = 4x_4$. Οπότε τώρα ζητάμε τις λύσεις τηε εξίσωσης

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1000$$

με τους περιορισμούς $0 \leq y_1$, $25 \leq y_2 \leq 50$, $10 \leq y_3 \leq 20$, $0 \leq y_4$ και επιπλέον ζητάμε το y_1 να είναι πολλαπλάσιο του 3, το y_2 πολλαπλάσιο του 5, και το y_4 πολλαπλάσιο του 4. Οι απαριθμητές λοιπόν είναι:

$(1 + z^3 + z^6 + \cdots)$ για το y_1,

$(z^{25} + z^{30} + \cdots + z^{50})$ για το y_2,

$(z^{10} + z^{11} + \cdots + z^{20})$ για το y_3 και

$(1 + z^4 + z^8 + \cdots)$ για το y_4.

Η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει από το γινόμενο των απαριθμητών

$$(1 + z^3 + z^6 + \cdots)(z^{25} + z^{30} + \cdots + z^{50})(z^{10} + z^{11} + \cdots + z^{20})(1 + z^4 + z^8 + \cdots)$$

και σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του z^{1000}.