Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:.....................Διδάσκων:.. ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2018

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Υπάρχει απλό διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (6, 2, 2, 2, 2, 2, 2).

   ii. Αν ένα μη συνεκτικό γράφημα έχει ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού, τότε αυτές βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος.

   iii. Υπάρχει δένδρο με 8 κορυφές και 10 ακμές.

   iv. Ένα γράφημα που περιλαμβάνει τρίγωνο έχει χρωματικό αριθμό τουλάχιστον 3.

   v. Αν προσθέσουμε δύο ακμές στον απλό κύκλο $C_n, n \geq 4$, τότε το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Hamilton αλλά όχι κύκλο Euler.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Η κορυφή βαθμού 6 πρέπει να συνδέεται με όλες τις άλλες. Επειδή όμως το γράφημα είναι διμερές και οι 6 άλλες κορυφές θα πρέπει να βρίσκονται στο άλλο τμήμα του γραφήματος (το αντίθετο της κορυφής βαθμού 6). Όμως τότε δεν υπάρχουν άλλες κορυφές για να συνδεθούν αυτές.

   ii. Αληθής. Σε κάθε γράφημα υπάρχουν άρτιες το πλήθος κορυφές περιττού βαθμού. Αν όμως υπήρχε μία μόνο κορυφή περιττού βαθμού σε μία συνιστώσα, σε αυτή δεν θα ίσχυε αυτή η πρόταση.

   iii. Ψευδής. Σε ένα δένδρο με n κορυφές υπάρχουν πάντα n-1 ακμές.

   iv. Αληθής. Χρειάζονται 3 χρώματα για νόμιμο χρωματισμό του τριγώνου, επομένως ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος είναι τουλάχιστον 3.

   v. Αληθής. Η πρόσθεση δύο ακμών δημιουργεί κορυφές περιττού βαθμού, συνεπώς το γράφημα δεν έχει κύκλο Euler. Έχει όμως κύκλο Hamilton, τον αρχικό κύκλο.

2. (10 μον.) Δίδεται ένα επίπεδο συνεκτικό γράφημα G με 16 κορυφές που όλες έχουν βαθμό 4. Το G έχει επίπεδη αποτύπωση όπου κάθε όψη είναι ή τρίγωνο ή τετράπλευρο. Πόσες όψεις του είναι τρίγωνα και πόσες τετράπλευρα;

   Απάντηση

   Έστω x τα τρίγωνα και y τα τετράπλευρα. Το γράφημα έχει άθροισμα βαθμών $16 \times 4 = 64$. Συνεπώς οι ακμές του είναι 32. Από τον τύπο του Euler $n + f = m + 2$ παίρνουμε ότι $f = 18$. Έχουμε λοιπόν την σχέση $x + y = 18$. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα της Χειραψίας στις όψεις του γραφήματος παίρνουμε την σχέση $3x + 4y = 64$. Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων παίρνουμε $y = 10$ και $x = 8$.

3. (10 μον.) Δείξτε ότι δεν υπάρχει διμερές γράφημα με $n \geq 5$ που να είναι ισόμορφο με το συμπληρωματικό του.

Απάντηση

Αν το γράφημα έχει περισσότερες από 5 κορυφές, τότε υπάρχει ένα μέρος του με τουλάχιστον 3 κορυφές. Στο συμπληρωματικό όμως αυτές οι 3 συνιστούν τρίγωνο, άρα το γράφημα δεν μπορεί να είναι διμερές.

4. (15 μον.) Έστω φ, χ και ψ προτασιακοί τύποι. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Εξηγήστε τις απαντήσεις σας.

   i. $\varphi \vee \neg\varphi \models \varphi \to (\psi \to \varphi)$
   ii. Ο τύπος $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$ είναι ταυτολογία
   iii. $\neg\varphi \models \neg\psi \to \neg\varphi$
   iv. $\varphi \wedge \psi \wedge \chi \models (\varphi \wedge \chi) \to (\psi \wedge \chi)$
   v. Αν ο φ είναι ταυτολογία και ο χ ικανοποιήσιμος τύπος, τότε ο τύπος $\varphi \wedge \chi$ είναι ταυτολογία

Απάντηση

   i. Αληθής. Και τα δύο μέρη αριστερά και δεξιά της ταυτολογικής συνεπαγωγής είναι ταυτολογίες.
   ii. Αληθής. Η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι αληθής μόνο όταν $\varphi \equiv \psi \equiv A$. Τότε όμως και το συμπέρασμα είναι αληθές.
   iii. Αληθής. Όταν $\neg\varphi$ είναι αληθής, τότε και το συμπέρασμα της συνεπαγωγής είναι αληθές, άρα και όλη η συνεπαγωγή.
   iv. Αληθής. Το αριστερό μέρος της ταυτολογικής συνεπαγωγής αληθεύει όταν $\varphi \equiv \psi \equiv \chi \equiv A$. Τότε όμως και η υπόθεση και το συμπέρασμα της συνεπαγωγής δεξιά, αληθεύουν επίσης.
   v. Ψευδής. Ο τύπος $\varphi \wedge \chi$ αληθεύει ακριβώς όταν αληθεύει ο χ, δηλαδή δεν είναι ταυτολογία.

5. (10 μον.) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $G(x, y)$ δηλώνει ότι «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή». Σε αυτή την ερμηνεία γράψτε ένα τύπο που να δηλώνει: «Η κορυφή u του γραφήματος συνδέεται με όλες τις άλλες εκτός από δύο».

Απάντηση

$$\varphi(u) = \exists x \exists y (x \neq y \wedge y \neq u \wedge u \neq x \wedge \neg G(u, x) \wedge \neg G(u, y) \wedge \forall w (w \neq x \wedge w \neq y \wedge w \neq u \to G(u, w)))$$

6. (15 μον.) Έχουμε $2n$ αντικείμενα από τα οποία n είναι όμοια μεταξύ τους. Τα υπόλοιπα n είναι διαφορετικά και μεταξύ τους και με τα n όμοια. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε n αντικείμενα από τα $2n$;

Απάντηση

Μία επιλογή n αντικειμένων από τα $2n$ μπορεί να διαμορφωθεί επιλέγοντας στην αρχή k από τα διαφορετικά αντικείμενα, $0 \leq k \leq n$, και συμπληρώνοντας την επιλογή μας με $n-k$ από τα όμοια (με ένα τρόπο). Οι διαφορετικές επιλογές λοιπόν είναι όσα τα υποσύνολα των n διαφορετικών αντικειμένων, δηλαδή 2^n.

7. (20 μον.) Στο μάθημα των «Διακριτών Μαθηματικών» κατέβηκαν στην εξέταση 100 πρωτοετείς και 50 δευτεροετείς φοιτητές και χρησιμοποιήθηκαν τρία αμφιθέατρα τα Α', Β' και Γ' χωρητικότητας 200 θέσεων το κάθε ένα.

   i. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθήσουν οι φοιτητές στα αμφιθέατρα αν μας ενδιαφέρει μόνο το έτος του κάθε φοιτητή δηλαδή οι φοιτητές του κάθε έτους δεν θεωρούνται διακεκριμένοι. Εδώ οι θέσεις των αμφιθεάτρων δεν θεωρούνται αριθμημένες άρα *έχει σημασία μόνο πόσοι φοιτητές από κάθε έτος μπαίνουν σε κάθε αμφιθέατρο*.

   ii. Όπως στο (i) αλλά τώρα οι θέσεις των αμφιθεάτρων είναι αριθμημένες και μας ενδιαφέρει αν σε κάποιο κάθισμα κάθεται πρωτοετής ή δευτεροετής φοιτητής (ή δεν κάθεται κανείς).

   iii. Ομοίως, αλλά εδώ και τα καθίσματα και οι φοιτητές θεωρούνται διακεκριμένοι οπότε μας ενδιαφέρει σε ποιο κάθισμα κάθεται κάθε συγκεκριμένος φοιτητής.

   iv. Στο ερώτημα αυτό οι δεν μας ενδιαφέρει ούτε η ταυτότητα ούτε το έτος του φοιτητή και τα καθίσματα των αμφιθεάτρων δεν θεωρούνται αριθμημένα. Ζητείται να δοθεί γεννήτρια συνάρτηση και να υποδειχθεί η δύναμη του x ο συντελεστής της οποίας δείχνει με πόσους τρόπους κάθονται οι 150 συνολικά φοιτητές αν στο κάθε αμφιθέτρο πρέπει να μπουν τουλάχιστον 20 και στο αμφιθέατρο Α' το πολύ 100 φοιτητές.

Απάντηση

   i. Παρατηρούμε αρχικά ότι κάθε αμφιθέατρο έχει αρκετή χωρητικότητα για όλους τους φοιτητές και των δύο ετών. Διανέμουμε λοιπόν πρώτα τους 100 πρωτοετείς στα 3 αμφιθέτρα. Επειδή δεν τους θεωρούμε διακεκριμένους, είναι σαν διανομή 100 όμοιων μπαλών σε 3 διακεκριμένες υποδοχές, δηλαδή $\binom{100+3-1}{100} = \binom{102}{100}$. Παρόμοια, η διανομή των δευτεροετών είναι $\binom{50+3-1}{50} = \binom{52}{50}$. Συνολικά λοιπόν:

$$\binom{102}{100} \cdot \binom{52}{50}$$

   ii. Εφόσον τα καθίσματα είναι αριθμημένα, έχουμε 600 διαφορετικά καθίσματα. Μπορούμε να δούμε λοιπόν το πρόβλημα σαν να αφήνουμε σε κάθε κάθισμα το σύμβολο Α, Β ή Κ (κενό). Πρόκειται λοιπόν για μεταθέσεις 600 αντικειμένων που διαιρούνται σε 3 ομάδες μη διακεκριμένων μεταξύ τους αντικειμένων. Οι τρόποι είναι:

$$\frac{600!}{100! \cdot 50! \cdot 450!}$$

   iii. Έχουμε και πάλι 600 διαφορετικά καθίσματα και 150 διαφορετικούς φοιτητές. Οι τρόποι είναι $(600)_{150} = \frac{600!}{450!}$

   iv. Η γεννήτρια είναι:

$$(x^{20} + x^{21} + \cdots + x^{100})(x^{20} + x^{21} + \cdots + x^{200})^2$$

   Σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{150}.

8. (15 μον.) Από 1000 φοιτητές, οι 600 μιλάνε Αγγλικά, οι 400 Γαλλικά και οι 200 Γερμανικά. Υπάρχουν 400 φοιτητές που μιλούν 2 ξένες γλώσσες (οποιεσδήποτε) και 100 που μιλούν 3 γλώσσες. Πόσοι φοιτητές δεν μιλούν καμία ξένη γλώσσα;

   Απάντηση

   Έστω e, f, g τα σύνολα των φοιτητών που μιλούν Αγγλικά, Γαλλικά και Γερμανικά αντίστοιχα. Τότε από το Θεώρημα Εγκλεισμού-Αποκλεισμού θα έχουμε:

   $$\overline{e}\overline{f}\overline{g} = 1000 - 600 - 400 - 200 + 400 - 100 = 100$$

   φοιτητές δεν μιλούν καμία ξένη γλώσσα.