Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2018

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών την (6,6,6,5,4,3,2).

   ii. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα 10 κορυφών, 14 ακμών που έχει επίπεδη αποτύπωση με 5 όψεις.

   iii. Οι πίνακες γειτνίασης δύο ισόμορφων γραφημάτων είναι ίσοι.

   iv. Το $K_{n,m}, n, m \geq 2$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν $n = m$.

   v. Οι κορυφές ενός γραφήματος διαμερίζονται σε k σύνολα ανεξαρτησίας, αν και μόνο αν αυτό είναι k-χρωματικό.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Αν υπήρχε τέτοιο γράφημα θα ήταν 7 κορυφών, 3 από τις οποίες θα είχαν βαθμό 6 δηλαδή κάθε μία θα συνδέονταν με όλες τις υπόλοιπες. Όμως αυτό είναι αδύνατο καθώς μια κορυφή θα πρέπει να έχει βαθμό 2.

   ii. Ψευδής. Αν υπήρχε τέτοιο γράφημα θα έπρεπε να ικανοποιεί τον τύπο του Euler για συνεκτικά επίπεδα γραφήματα $n + f = m + 2$. Θέτοντας $n = 10$, $m = 14$ και $f = 5$ παρατηρούμε ότι δεν ισχύει η ισότητα, άρα δεν υπάρχει τέτοιο γράφημα.

   iii. Ψευδής. Εξαρτάται από την αρίθμηση που έχουν οι κορυφές των δύο γραφημάτων.

   iv. Αληθής. Ένας κύκλος Hamilton σε ένα διμερές γράφημα περνά εναλλάξ από κορυφές των δύο μερών. Άρα αυτά πρέπει αναγκαστικά να έχουν ίδιο πλήθος κορυφών και συνεπώς $n = m$. Αντίστροφα, αν $n = m \geq 2$ τότε υπάρχει τετριμμένα κύκλος Hamilton στο γράφημα.

   v. Αληθής. Αν το γράφημα είναι k-χρωματικό, τότε κάθε χρωματική ομάδα, είναι προφανώς ένα σύνολο ανεξαρτησίας. Αντίστροφα, αν υπάρχει διαμέριση των κορυφών σε k σύνολα ανεξαρτησίας, τότε οι κορυφές κάθε συνόλου ανεξαρτησίας μπορούν να χρωματιστούν με ένα χρώμα, άρα το γράφημα είναι k-χρωματικό.

2. (20 μον.) Ο υπερκύβος Q_n διάστασης n είναι ένα απλό μη κατευθυντικό γράφημα που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

   1. Το Q_1 είναι το γράφημα με μία μόνο κορυφή (και άρα και καμία ακμή).

2. Για να κατασκευάσουμε το $Q_n, n > 1$ όταν έχει κατασκευαστεί το Q_{n-1}, αριθμούμε αυθαίρετα τις κορυφές του τελευταίου, παίρνουμε δύο αντίγραφα του Q_{n-1} (με αριθμημένες τις κορυφές) και ενώνουμε με μία ακμή τις κορυφές με τον ίδιο αριθμό.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό:

i. Σχεδιάστε τα γραφήματα Q_2, Q_3 και Q_4

ii. Πόσες κορυφές έχει το Q_n (σαν συνάρτηση του n);

iii. Τι βαθμό έχει κάθε κορυφή του Q_n;

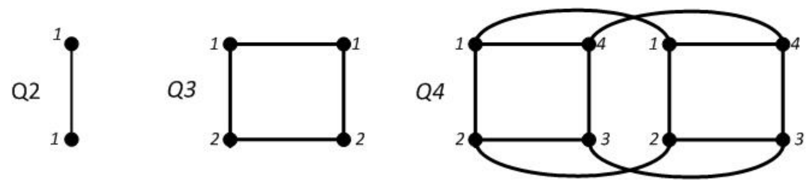
iv. Πόσες ακμές έχει το Q_n;

v. Για ποιές τιμές του n έχει το Q_n κύκλο Euler;

vi. (επιπλέον 1 βαθμός). Δείξτε με επαγωγή στο n ότι για $n \geq 3$, το Q_n έχει κύκλο Hamilton.

Απάντηση

i. Τα γραφήματα φαίνονται παρακάτω.



ii. Το Q_2 έχει 2 κορυφές, το Q_3 4, το Q_4 8 κλπ. Γενικά από τον τρόπο κατασκευής του Q_n, αυτό έχει το διπλάσιο πλήθος κορυφών από το Q_{n-1}. Δεδομένου ότι το Q_1 έχει 1 κορυφή, απλή επαγωγή δείχνει ότι το Q_n έχει 2^{n-1} κορυφές.

iii. Επειδή κατά τον σχηματισμό του Q_n μία κορυφή ενός από τα δύο αντίγραφα του Q_{n-1} ενώνεται με μία ακόμη κορυφή (την αντίστοιχη από το άλλο αντίγραφο του Q_{n-1}), ενώ ταυτόχρονα διατηρεί όλες τις ακμές των οποίων ήταν άκρο στο πρώτο αντίγραφο του Q_{n-1}, συμπεραίνουμε ότι ο βαθμός κάθε κορυφής αυξάνεται κατά 1 στο Q_n σε σχέση με τον βαθμό που είχε στο Q_{n-1}. Άρα οι κορυφές του Q_n έχουν όλες βαθμό $n-1$.

iv. Από το (ii) το Q_n έχει 2^{n-1} κορυφές, όλες βαθμού (από το (iii)) $n-1$. Το Λήμμα της Χειραψίας δίνει ότι το πλήθος των ακμών του Q_n είναι $(n-1)2^{n-1}/2 = (n-1)2^{n-2}$ $(n \geq 2)$.

v. Για να έχει το Q_n κύκλο Euler, θα πρέπει όλες οι κορυφές του να έχουν άρτιο βαθμό. Από το (iii) ο βαθμός κάθε κορυφής του Q_n είναι $n-1$. Συνεπώς το Q_n έχει κύκλο Euler για κάθε περιττό $n > 1$.

vi. *Βάση:* Για $n = 3$ το Q_3 έχει προφανώς κύκλο Hamilton. *Υπόθεση:* Έστω ότι για $n > 3$ το Q_n έχει κύκλο Hamilton C. *Βήμα:* Έστω ότι στον C οι κορυφές i και j είναι διαδοχικές, δηλαδή συνδέονται με ακμή στον C. Εφόσον το Q_{n+1} κατασκευάζεται από δύο αντίγραφα του Q_n, ένας κύκλος Hamilton του Q_{n+1} πρώτα επισκέπτεται τις κορυφές του πρώτου αντιγράφου Q_n μέσω των ακμών του κύκλου Hamilton C από την κορυφή i στην κορυφή j (χωρίς να χρησιμοποιήσει την ακμή ij), στην συνέχεια χρησιμοποιεί την ακμή jj που συνδέει κορυφή j με την αντίστοιχη της στο άλλο αντίγραφο, μετά ακολουθεί τον αντίστοιχο κύκλο Hamilton C του δεύτερου αντιγράφου από την j στην i και καταλήγει στην κορυφή i του πρώτου αντιγράφου μέσω της ακμής ii.

3. (15 μον.) Έστω φ και ψ προτασιακοί τύποι. Ποιοί από τους παρακάτω τύπους είναι ταυτολογίες, ποιοί αντιφάσεις και ποιοί τίποτε από τα δύο;

   i. $(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \to \neg(\varphi \to \varphi)$

   ii. $\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\psi)$

   iii. $(\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)$

   iv. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \wedge \psi)$

   v. $\varphi \leftrightarrow (\varphi \vee (\varphi \wedge \psi))$

   Απάντηση

   i. Αντίφαση. Παρατηρούμε ότι η υπόθεση της (κορυφαίας) συνεπαγωγής είναι ταυτολογία (είναι το ΑΣ1) ενώ το συμπέρασμα της είναι αντίφαση. Άρα η συνεπαγωγή δεν ικανοποιείται για καμία αποτίμηση.

   ii. Ταυτολογία. Τα δύο μέλη της ισοδυναμίας είναι πράγματι ισοδύναμα. Έχουμε: $\neg(\varphi \to \psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \psi) \equiv \varphi \wedge \neg\psi$

   iii. Ταυτολογία. Η υπόθεση της συνεπαγωγής αληθεύει μόνο όταν και οι δύο τύποι είναι αληθείς, αλλά τότε αληθεύει και το συμπέρασμα.

   iv. Τίποτε από τα δύο. Αν οι δύο τύποι έχουν διαφορετική αληθοτιμή, η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι ψευδής, άρα ο τύπος αληθεύει. Αν και οι δύο τύποι είναι ψευδείς, η υπόθεση είναι αληθής αλλά το συμπέρασμα ψευδές. Άρα ο τύπος διαψεύδεται.

   v. Ταυτολογία. Η σύζευξη αληθεύει το πολύ για τις αποτιμήσεις που αληθεύει ο φ, άρα όλο το δεύτερο μέλος αληθεύει ακριβώς για τις αποτιμήσεις που αληθεύει ο φ.

4. (10 μον.) Στην πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με ένα κατηγορηματικό σύμβολο G με ερμηνεία $G(x, y)$: «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή», γράψτε τύπο $\varphi(x, y)$ που να δηλώνει: «το σύνολο των γειτονικών κορυφών της x είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των γειτονικών κορυφών της y». (Γειτονικές κορυφές μιας κορυφής είναι όσες συνδέονται με ακμή με την κορυφή αυτή.)

$$\varphi(x, y) = \forall z(G(x, z) \to G(y, z)) \wedge \exists z(G(y, z) \wedge \neg G(x, z))$$

5. (15 μον.) Ρίχνουμε ένα ζάρι k φορές και σημειώνουμε τα αποτελέσματα των ρίψεων.

   i. Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες ρίψεων που μπορεί να πάρουμε;

   ii. Ποιά η πιθανότητα να έχουμε ακολουθία που να περιλαμβάνει το 5 τουλάχιστον μία φορά;

   iii. Ποιά η πιθανότητα να εμφανιστούν στην ακολουθία τουλάχιστον 2 άρτιοι αριθμοί, όχι αναγκαστικά διαφορετικοί μεταξύ τους ($k \geq 2$);

   Απάντηση

   i. 6^k. Πρόκειται για διατάξεις με επανάληψη.

ii. Οι ακουλουθίες που δεν περιλαμβάνουν καθόλου το 5, είναι 5^k, άρα αυτές που το περιλαμβάνουν τουλάχιστον μία φορά είναι $6^k - 5^k$. Συνεπώς η πιθανότητα που ζητείται είναι $1 - (\frac{5}{6})^k$.

iii. Το πλήθος των ακολουθιών όπου εμφανίζονται τουλάχιστον 2 άρτιοι αριθμοί, όχι αναγκαστικά διαφορετικοί μεταξύ τους, προκύπτει από το συνολικό πλήθος των ακολουθιών όταν αφαιρέσουμε αυτές με καμία εμφάνιση άρτιου αριθμού και αυτές με ακριβώς μία εμφάνιση άρτιου αριθμού. Οι πρώτες είναι 3^k ενώ οι δεύτερες προκύπτουν όταν επιλέξουμε την θέση του άρτιου αριθμού και καθώς και τον αριθμό που θα εμφανιστεί εκεί. Όλες οι υπόλοιπες θέσεις πρέπει να καταληφθούν από περιττό αριθμό. Υπάρχουν συνεπώς $3k3^{k-1} = k3^k$ τέτοιες ακολουθίες. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι λοιπόν $\frac{6^k - 3^k - k3^k}{6^k} = 1 - (k+1)2^{-k}$.

6. (15 μον.) 50 φοιτητές του Μαθηματικού που παρακολουθούν ένα μάθημα χωρίζονται σε 5-μελείς ομάδες εργασίας.

   i. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν όλες οι ομάδες θα ασχοληθούν με το ίδιο θέμα;

   ii. Όπως στο (i) αλλά τώρα υπάρχουν 10 διαφορετικά ερωτήματα, ένα για κάθε ομάδα εργασίας που θα δημιουργηθεί.

   iii. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 3 5-μελείς ομάδες από τις 10 που έχουν συγκροτηθεί;

   Απάντηση

   i. Σε αυτή την περίπτωση μία ομάδα προσδιορίζεται μόνο από τα μέλη της. Έχουμε συνεπώς διατάξεις 50 «αντικειμένων» που χωρίζονται σε 10 5-μελείς ομάδες με μη διακεκριμένα στοιχεία οι οποίες όμως δεν έχουν διάταξη. Ο γνωστός τύπος των διατάξεων 50 αντικειμένων που χωρίζονται σε 10 5-μελείς ομάδες $50!/(5!)^{10}$, υπονοεί διάταξη μεταξύ των ομάδων. Η ποσότητα αυτή πρέπει λοιπόν να διαιρεθεί με 10!. Τελικά οι τρόποι είναι $50!/((5!)^{10} \cdot 10!)$.

   ii. Εδώ το διαφορετικό ερώτημα κάθε ομάδας εργασίας του (i) επιβάλλει αυτή τη διάταξη που είπαμε παραπάνω. Οι τρόποι λοιπόν είναι $50!/(5!)^{10}$.

   iii. Με $\binom{10}{3}$. Πρόκειται για συνδυασμούς των 10 ανά 3.

7. (20 μον.) Θέλουμε να μοιράσουμε 25 όμοιες σοκολάτες σε 7 παιδιά με τον περιορισμό ότι το πρώτο παιδί δεν μπορεί να πάρει πάνω από 10 σοκολάτες.

   i. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και *υπολογίστε* τον συντελεστή που δίνει απάντηση στο ερώτημα αυτό.

   ii. Απαντήστε το ίδιο ερώτημα χωρίς την χρήση γεννήτριας συνάρτησης.

   Απάντηση

   i. Ο απαριθμητής για το πρώτο παιδί είναι $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})$ ενώ για κάθε ένα από τα υπόλοιπα παιδιά είναι $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{25})$. Η γεννήτρια είναι συνεπώς η

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{25})^6$$

και σε αυτή αναζητάμε τον συντελεστή του x^{25}.

Ο υπολογισμός του συντελεστή διευκολύνεται αν θεωρήσουμε τους απαριθμητές των 6 παιδιών εκτός του πρώτου, να πηγαίνουν στο άπειρο. Είναι προφανές ότι ο ζητούμενος συντελεστής δεν επηρεάζεται με αυτή τη μετατροπή. Έχουμε λοιπόν:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{10})(1+x+x^2+\cdots)^6 = \frac{1-x^{11}}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^6} = \frac{1}{(1-x)^7} - \frac{x^{11}}{(1-x)^7}$$

Ο μειωτέος γράφεται σαν $(1-x)^{-7} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+6}{n}x^n$. Ο συντελεστής του x^{25} από τον όρο αυτό είναι συνεπώς $\binom{31}{25}$.

Αντίστοιχα ο αφαιρετέος γράφεται $\frac{x^{11}}{(1-x)^7} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+6}{n}x^{n+11}$. Ο συνετελεστής του x^{25} εδώ προκύπτει προφανώς για $n = 14$ και είναι $\binom{20}{14}$. Συνολικά λοιπόν ο ζητούμενος συντελεστής είναι ο $\binom{31}{25} - \binom{20}{14}$.

ii. Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός θα διανέμαμε 25 όμοια αντικειμένα σε 7 διακεκριμένες υποδοχές. Οι τρόποι θα ήταν $\binom{25+7-1}{25} = \binom{31}{25}$. Οι τρόποι διανομής που παραβιάζουν τον περιορισμό προκύπτουν αν δώσουμε 11 σοκολάτες στο πρώτο παιδί και στην συνέχεια διανείμουμε τις υπόλοιπες 14 σοκολάτες σε όλα τα παιδιά (και στο πρώτο) χωρίς περιορισμούς. Οι τρόποι είναι όπως παραπάνω $\binom{20}{14}$. Άρα οι τρόποι που πληρούν τον περιορισμό είναι $\binom{31}{25} - \binom{20}{14}$.