ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Αυγούστου 2017

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Το συμπληρωματικό κάθε διμερούς γραφήματος με $n \geq 10$ κορυφές δεν είναι επίπεδο.

   ii. Το K_5 είναι υπογράφημα του $K_{5,5}$.

   iii. Κάθε πλήρες διμερές γράφημα με άρτιο πλήθος κορυφών έχει κύκλο Euler.

   iv. Αν κάποιο γράφημα με $n \geq 3$ κορυφές έχει χρωματικό αριθμό ίσο με n, τότε αυτό έχει κύκλο Hamilton.

   v. Αν το G είναι πλήρες γράφημα, τότε κάθε επαγόμενο υπογράφημα του είναι επίσης πλήρες γράφημα.

   Απάντηση

   i. Αληθής. Εφόσον το διμερές γράφημα έχει τουλάχιστον 10 κορυφές, ένα τουλάχιστον τμήμα του έχει τουλάχιστον 5 κορυφές. Το τμήμα αυτό είναι σύνολο ανεξαρτησίας στο γράφημα και συνεπώς είναι πλήρες γράφημα στο συμπληρωματικό του. Όμως ένα πλήρες γράφημα με τουλάχιστον 5 κορυφές, περιλαμβάνει το K_5 και άρα δεν είναι επίπεδο γράφημα.

   ii. Ψευδής. Το K_5 έχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο, ενώ το $K_{5,5}$ όχι επειδή είναι διμερές γράφημα και συνεπώς δεν περιλαμβάνει περιττούς κύκλους.

   iii. Ψευδής. Π.χ. το $K_{3,3}$ έχει 6 κορυφές αλλά όλες έχουν βαθμό 3, δηλαδή περιττό. Συνεπώς δεν έχει κύκλο Euler.

   iv. Αληθής. Αν ένα γράφημα με n κορυφές έχει χρωματικό αριθμό n, τότε πρόκειται για το K_n. Συνεπώς έχει κύκλο Hamilton.

   v. Αληθής. Οποιαδήποτε επιλογή ενός υποσυνόλου των κορυφών του πλήρους γραφήματος, περιλαμβάνει κορυφές που συνδέονται όλες ανά δύο μεταξύ τους. Συνεπώς πρόκειται για πλήρες γράφημα.

2. (10 μον.) Έστω G ένα μη συνεκτικό γράφημα. Δείξτε ότι το συμπληρωματικό του G, $\overline{G}$, είναι συνεκτικό.

   Απάντηση

   Έστω u και v δύο οποιεσδήποτε κορυφές του $\overline{G}$. Αν βρίσκονται σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες στο G, τότε στο $\overline{G}$ συνδέονται με ακμή μεταξύ τους. Αν βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα στο G, τότε υπάρχει μία τουλάχιστον κορυφή, έστω η w, σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα από τις κορυφές u και v. Στο $\overline{G}$ λοιπόν υπάρχουν οι ακμές uw και vw, συνεπώς οι u και v συνδέονται με μονοπάτι μήκους 2. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν οι u και v αποτελούν τα άκρα κάποιου μονοπατιού στο $\overline{G}$. Άρα το $\overline{G}$ είναι συνεκτικό.

3. (10 μον.) Έστω A ο πίνακας γειτνίασης του K_7. Χωρίς πολλαπλασιασμό πινάκων, υπολογίστε τον A^2.

Απάντηση

Το τετράγωνο του πίνακα γειτνίασης του K_7 είναι

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ο τελευταίος υπολογίστηκε με βάση την γνωστή ιδιότητα του πίνακα γειτνίασης, δηλαδή ότι η k-οστη δύναμη του έχει στην θέση (i, j) το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j. Συνεπώς στην διαγώνιο θα υπάρχουν παντού 6 διότι υπάρχουν 6 διαδρομές μήκους 2 από μία κορυφή πίσω στον εαυτό της (μετάβαση σε μια οποιαδήποτε άλλη γειτονική και πάλι πίσω). Κάθε κορυφή έχει 6 γείτονες στο K_7. Σε οποιαδήποτε άλλη θέση θα υπάρχει 5 διότι από μία κορυφή μεταβαίνουμε σε μία άλλη με μονοπάτι μήκους 2, μέσω μιας οποιαδήποτε άλλης κορυφής από τις 5.

4. (10 μον.) Έστω φ, ψ, και χ προτασιακοί τύποι. Δείξτε ότι $\{(\varphi \to \psi) \to \neg\chi, \chi\} \vdash \neg(\varphi \to \psi)$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα Μεταθεωρήματα (Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής κλπ.) αλλά όχι τα Θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας.

Απάντηση

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Αντιθετοαναστροφής, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\{(\varphi \to \psi) \to \neg\chi, (\varphi \to \psi)\} \vdash \neg\chi$$

Η τυπική απόδειξη λοιπόν είναι:

1.	$(\varphi \to \psi) \to \neg\chi$	Υπόθεση
2.	$\varphi \to \psi$	Υπόθεση
3.	$\neg\chi$	1,2 MP

5. (10 μον.) Δείξτε ότι $\{p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots, p_9 \to p_{10}, p_{10} \to p_1\} \models (p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{10}) \vee (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_{10})$. (*Υπόδειξη: Βρείτε πρώτα ποιες αποτιμήσεις επαληθεύουν το αριστερό μέλος και δείξτε ότι επαληθεύουν και το δεξί.*)

Απάντηση

Η αποτίμηση που αποδίδει Ψ σε όλες τις μεταβλητές, επαληθεύει και τους 10 τύπους του αριστερού μέλους. Επίσης, μία αποτίμηση που αποδίδει την τιμή Α σε μία μεταβλητή, έστω στην p_i, $1 \le i \le 9$, σημαίνει ότι και η $p_{i+1} = A$ για να αληθεύει ο τύπος $p_i \to p_{i+1}$ (αν $i = 10$, πρέπει $p_1 = A$). Αυτό όμως σημαίνει ότι και $p_{i+2} = A$ λόγω του τύπου $p_{i+1} \to p_{i+2}$ και τελικά όλες οι μεταβλητές πρέπει να είναι αληθείς ώστε να αληθεύουν και οι 10 τύποι του αριστερού μέλους. Επομένως 2 ακριβώς αποτιμήσεις επαληθεύουν τους 10 τύπους του αριστερού μέλους, η «όλα αληθή» και η «όλα ψευδή». Η πρώτη όμως αληθεύει την πρώτη παρένθεση του δεύτερου μέλους, και η δεύτερη, την δεύτερη. Άρα η ταυτολογική συνεπαγωγή ισχύει.

6. (15 μον.) Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα με σύμπαν το σύνολο των ανθρώπων, η οποία είναι εφοδιασμένη με τα κατηγορήματα $\Phi(x)$, $M(x)$, $\Pi(x)$, $\Delta(x)$ και $\Theta(x, y)$ με ερμηνείες «ο x είναι φοιτητής», «ο x είναι μουσικός», «ο x είναι πολιτικός», «ο x είναι δικηγόρος» και «ο x θαυμάζει τον y», αντίστοιχα. Δώστε τύπους σε αυτή τη γλώσσα που να δηλώνουν τις ακόλουθες προτάσεις:

   i. Υπάρχουν δικηγόροι που είναι και πολιτικοί.
   ii. Μερικοί φοιτητές θαυμάζουν μόνο μουσικούς.
   iii. Αν ένας φοιτητής είναι και μουσικός, τότε δεν θαυμάζει κανένα πολιτικό.

   Απάντηση

   i. $\exists x(\Delta(x) \wedge \Pi(x))$
   ii. $\exists x \exists y(\Phi(x) \wedge M(y) \wedge \Theta(x, y) \wedge \forall z(\Theta(x, z) \to M(z)))$
   iii. $\forall x(\Phi(x) \wedge M(x) \to \forall y(\Theta(x, y) \to \neg\Pi(y)))$

7. (10 μον.) Πόσοι αριθμοί από το 0 έως το 99999 περιλαμβάνουν το ψηφίο 5 τουλάχιστον 2 φορές;

   Απάντηση

   Όλοι οι αριθμοί από το 0 έως το 99999 είναι 10^5. Από αυτό το σύνολο πρέπει να εξαιρέσουμε όσους δεν περιλαμβάνουν κανένα 5 (είναι 9^5) και όσους περιλαμβάνουν ακριβώς ένα 5. Αυτοί είναι $5 \cdot 9^4$: έχουμε επιλογή μίας από τις 5 θέσεις για το μοναδικό 5 και για τις υπόλοιπες 4, έχουμε 9 επιλογές ψηφίων. Συνολικά λοιπόν το ζητούμενο πλήθος αριθμών είναι $10^5 - 9^5 - 5 \cdot 9^4$.

8. (15 μον.) Με πόσους τρόπους μπορούν να διανεμηθούν 30 πανομοιότυπα κόκκινα τετράδια και 15 πανομοιότυπα πράσινα τετράδια σε 4 παιδιά αν κάθε παιδί πρέπει να πάρει τουλάχιστον 3 κόκκινα και τουλάχιστον 2 πράσινα τετράδια;

   Απάντηση

   Δίνουμε σε κάθε παιδί από 3 κόκκινα και από 2 πράσινα τετράδια ώστε να καλύψουμε τον ζητούμενο περιορισμό. Απομένουν προς διανομή 18 κόκκινα και 7 πράσινα τετράδια τα οποία διανέμουμε χωρίς περιορισμούς. Οι τρόποι διανομής των κόκκινων τετραδίων είναι όσοι οι τρόποι διανομής 18 μη διακεκριμένων σφαιριδίων σε 4 υποδοχές δηλαδή $\binom{18+4-1}{18} = \binom{21}{18}$. Παρόμοια, οι διανομές των πράσινων τετραδίων είναι $\binom{7+4-1}{7} = \binom{10}{7}$. Από τον κανόνα του γινομένου οι τρόποι διανομής είναι συνολικά $\binom{21}{18} \cdot \binom{10}{7} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21}{36}$.

9. (10 μον.) Θέλουμε να στελεχώσουμε 3 διαφορετικές επιτροπές από ένα σύνολο 40 υποψηφίων. Οι επιτροπές έχουν 10, 7 και 5 μέλη αντίστοιχα. Τα μέλη των δύο πρώτων επιτροπών είναι *ισότιμα* ενώ της τρίτης έχουν όλα *διαφορετικούς ρόλους* μέσα στην επιτροπή (π.χ. πρόεδρος, αντιπρόεδρος, γραμματέας κλπ.). Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Απάντηση

Επιλέγουμε τα μέλη της πρώτης επιτροπής με $\binom{40}{10}$ τρόπους. Στην συνέχεια της δεύτερης από τους εναπομείναντες 30 υποψήφιους με $\binom{30}{7}$ τρόπους. Για την τρίτη επιτροπή όμως οι τρόποι είναι $(23)_5$ μια και τώρα τα 5 μέλη της πρέπει και να διαταχθούν εφόσον οι 5 θέσεις της επιτροπής είναι διακεκριμένες. Από τον κανόνα του γινομένου έχουμε ότι οι τρόποι στελέχωσης της επιτροπής είναι $\binom{40}{10}\binom{30}{7}(23)_5$.

10. (10 μον.) Μία μεταφορική εταιρεία έχει προς μεταφορά πολλά (πρακτικά απεριόριστα) όμοια πακέτα των 20 κιλών και 100 όμοια πακέτα των 10 κιλών. Η εταιρεία διαθέτει ένα φορτηγό μεταφορικής ικανότητας 2000 κιλών. Θέλουμε να υπολογίσουμε με πόσους τρόπους μπορεί να φορτωθεί πλήρως το φορτηγό από κάποιο υποσύνολο των πακέτων συνολικού βάρους 2000 κιλών. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον συντελεστή της ο οποίος δίνει απάντηση στο ερώτημα αυτό. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον συντελεστή.

Απάντηση

Το πρόβλημα είναι στην ουσία πρόβλημα επιλογής κιλών, όπου οι επιλογές 20-κιλων πακέτων σημαίνει επιλογή μιας ποσότητας που είναι πολλαπλάσια του 20. Παρόμοια, οι επιλογές 10-κιλων πακέτων αντιστοιχούν σε επιλογή που είναι πολλαπλάσια του 10. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι συνεπώς η

$$(1 + x^{20} + x^{40} + \cdots)(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{1000})$$

Σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{2000}.

Επισημαίνουμε την διαφορά στους δύο απαριθμητές. Ο πρώτος έχει δυνάμεις που μπορεί να φτάσουν στο 2000 ή σε οποιαδήποτε μεγαλύτερη τιμή μέχρι το άπειρο, μια και όλη η δυνατότητα του φορτηγού μπορεί να καλυφθεί από 20-κιλα πακέτα. Ο δεύτερος όμως πρέπει υποχρεωτικά να σταματήσει στο 1000 μια και τόσο είναι το μέγιστο βάρος που συγκεντρώνεται από 10-κιλα πακέτα.