Ονοματεπώνυμο:... ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:.. ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2017

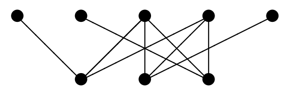
Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

   i. Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (3, 3, 3, 3, 3, 1, 1, 1).
   ii. Κάθε γράφημα με n κορυφές και λιγότερες από $3n - 6$ ακμές είναι επίπεδο.
   iii. Υπάρχει δένδρο με 10 κορυφές και 12 ακμές.
   iv. Ένα 3-χρωματίσιμο γράφημα με 10 κορυφές έχει σύνολο ανεξαρτησίας μεγέθους τουλάχιστον 4.
   v. Αν το γράφημα G έχει κύκλο Hamilton άρτιου μήκους, τότε έχει άρτιο πλήθος κορυφών.

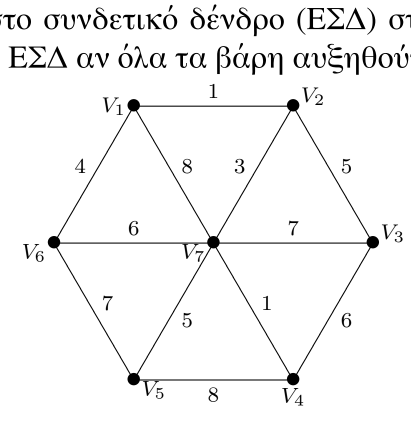
   Απάντηση.

   i. Αληθής. Το γράφημα είναι το παρακάτω.

   ii. Ψευδής. Αυτή είναι μία *αναγκαία* όχι και ικανή συνθήκη επιπεδότητας. Π.χ. ένα K_5 μαζί με 10 απομονωμένες κορυφές είναι ένα μη επίπεδο γράφημα που όμως πληροί την ανισότητα.
   iii. Ψευδής. Ένα δένδρο με n κορυφές έχει πάντα $n - 1$ ακμές.
   iv. Αληθής. Το μέσο μέγεθος κορυφών κάθε χρωματικής ομάδας είνα $10/3 = 3,3$. Άρα μία τουλάχιστον χρωματική ομάδα έχει μέγεθος ≥ 4.
   v. Αληθής. Ο κύκλος Hamilton διέρχεται από όλες τις κορυφές του γραφήματος και προφανώς έχει τόσες ακμές όσες και κορυφές.

2. (10 μον.) Βρείτε ένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο (ΕΣΔ) στο παρακάτω γράφημα με βάρη. Ποιό θα είναι το βάρος ενός ΕΣΔ αν όλα τα βάρη αυξηθούν κατά 10;



Απάντηση.

Ένα ΕΣΔ μπορεί να βρεθεί είτε με τον αλγόριθμο του Prim είτε τον αλγόριθμο του Kruskal. Με τον αλγόριθμο του Prim π.χ. εισάγονται οι παρακάτω ακμές με την σειρά: v_1v_2, v_2v_7, v_7v_4, v_1v_6, v_2v_3, v_7v_5. Επειδή το γράφημα έχει 7 κορυφές κάθε ελάχιστο συνδετικό δένδρο θα έχει 6 ακμές. Αν συνεπώς το βάρος κάθε ακμής αυξηθεί κατά 10 μονάδες, το βάρος του ΕΣΔ θα επιβαρυνθεί κατά 60 μονάδες.

3. (10 μον.) Δείξτε ότι το συμπληρωματικό γράφημα του C_{25} (κύκλος 25 κορυφών) έχει και κύκλο Euler και κύκλο Hamilton.

   Απάντηση.

   Στο συμπληρωματικό του C_{25} κάθε κορυφή έχει βαθμό 22, δηλαδή άρτιο και συνεπώς το γράφημα έχει κύκλο Euler. Έχει επίσης και κύκλο Hamilton. Ένας τρόπος να δειχθεί αυτό είναι με την βοήθεια του Θεωρήματος του Dirac μια και ο ελάχιστος βαθμός κορυφής είναι 22 και $22 \geq 25/2$, του μισού δηλαδή πλήθους των κορυφών. Εναλλακτικά, χωρίς το Θεώρημα Dirac παρατηρούμε ότι αν αριθμήσουμε τις κορυφές του κύκλου κυκλικά από το 1 στο 25, στο συμπληρωματικό γράφημα υπάρχουν οι ακμές $(1,3),(3,5),(5,7)\ldots$ δηλαδή οι ακμές με άκρα ένα περιττό φυσικό και τον αμέσως επόμενο του. Παρόμοια υπάρχουν και οι ακμές $(2,4),(4,6),(6,8),\ldots$ δηλ. με άκρα έναν άρτιο φυσικό και τον επόμενο του. Ένας κύκλος Hamilton είναι λοιπόν ο $1,3,5,\ldots,25,2,4,\ldots,24,1$ εφόσον υπάρχουν επίσης και οι ακμές $(25,2)$ και $(24,1)$.

4. (15 μον.) Αν φ, χ και ψ προτασιακοί τύποι,

   (i) δείξτε ότι ισχύουν οι παρακάτω ταυτολογικές συνεπαγωγές.

   i. $\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi)) \models \varphi \to \neg\varphi$
   ii. $\models \psi \to (\psi \to \psi)$

   (ii) δείξτε ότι δεν είναι δυνατή η παρακάτω τυπική απόδειξη. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Πληρότητας.

   $\vdash ((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$

   Απάντηση.

   (i)

   i. Ο τύπος $\neg(\varphi \to (\psi \to \varphi))$ είναι αντίφαση σαν άρνηση μιας ταυτολογίας (του ΑΣ1) και μία αντίφαση συνεπάγεται λογικά κάθε τύπο.
   ii. Πρέπει να δειχθεί ότι ο τύπος $\models \psi \to (\psi \to \psi)$ είναι ταυτολογία πράγμα που ισχύει επειδή ο τύπος προκύπτει άμεσα από το ΑΣ1.

   (ii)

   Παρατηρούμε ότι ο δοθείς τύπος δεν είναι ταυτολογία διότι αν ψ ψευδής η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι αληθής, ενώ το συμπέρασμα γίνεται ψευδές όταν χ αληθής. Όμως τότε από το Θεώρημα Πληρότητας δεν ισχύει και ότι $\vdash ((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$.

5. (10 μον.) Θεωρούμε τη γλώσσα της κατηγορηματικής λογικής που ορίζεται σε απλά μη κατευθυντικά γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το διμελές

κατηγορηματικό σύμβολο $G(x, y)$ δηλώνει ότι «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή». Σε αυτή την ερμηνεία γράψτε ένα τύπο που να δηλώνει: «Μία συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος είναι το K_3».

Απάντηση.

$$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge G(x, y) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge \\ \forall w (x \neq w \wedge y \neq w \wedge z \neq w \rightarrow \neg G(w, x) \wedge \neg G(w, y) \neg G(w, z)))$$

6. (15 μον.) (i) Πόσα είναι τα υποσύνολα ενός συνόλου με n στοιχεία;

   (ii) Πόσα διαφορετικά γραφήματα n κορυφών ορίζονται σε n αριθμημένες κορυφές;

   Απάντηση.

   (i) 2^n

   (ii) Υπάρχουν $\binom{n}{2}$ ζευγάρια κορυφών που μπορούν να είναι άκρα ακμής. Συνεπώς ένα γράφημα θα προκύψει μετά από μια επιλογή ενός αυθαίρετου τέτοιου συνόλου από ζεύγη κορυφών που θα είναι οι ακμές του γραφήματος. Με βάση το (i) υπάρχουν $2^{\binom{n}{2}}$ τέτοιες επιλογές, άρα και διαφορετικά γραφήματα.

7. (15 μον.) 50 τουρίστες που θεωρούνται διακεκριμένοι ταξιδεύουν με ένα πλοίο σε 10 καμπίνες των 5 θέσεων η κάθε μία. Με πόσους τρόπους μπορούν να τακτοποιηθούν στις καμπίνες αν:

   i. Κάθε καμπίνα είναι αριθμημένη (διακεκριμένη) και οι 5 κουκέτες της κάθε καμπίνας θεωρούνται διακεκριμένες επίσης.
   ii. Οι καμπίνες είναι αριθμημένες αλλά οι κουκέτες δεν είναι. Στην περίπτωση αυτή έχει σημασία μόνο ποιοι τουρίστες έχουν μπει σε μία συγκεκριμένη καμπίνα και όχι ποια κουκέτα έχει ο καθένας από τους 5.
   iii. Ούτε οι καμπίνες ούτε οι κουκέτες είναι αριθμημένες.

   Απάντηση.

   i. Εφόσον κάθε κουκέτα προσδιορίζεται με μοναδικό τρόπο από τον αριθμό της και τον αριθμό της καμπίνας της, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την μετάθεση 50 αντικειμένων. Δηλαδή οι τρόποι είναι 50!
   ii. Στην περίπτωση αυτή οι 5 κουκέτες μιας καμπίνας είναι τα μη διακεκριμένα αντικείμενα μιας ομάδας αντικειμένων. Υπάρχουν 10 τέτοιες διαφορετικές ομάδες (οι 10 καμπίνες) και ζητάμε τις μεταθέσεις 50 αντικειμένων που χωρίζονται σε 10 ομάδες των 5 αντικειμένων. Οι τρόποι είναι $\frac{50!}{(5!)^{10}}$.
   iii. Εδώ οι ομάδες διακρίνονται μεταξύ τους μόνο από τα μέλη τους (δηλ. ποιοι τουρίστες βρίσκονται σε κάθε καμπίνα). Άρα πρέπει να αφαιρέσουμε την αρίθμηση στις καμπίνες που υποθέτει το αποτέλεσμα του (ii). Οι τρόποι τώρα είναι $\frac{50!}{(5!)^{10} \cdot 10!}$.

8. (10 μον.) Από τους 300 πρωτοετείς Μαθηματικούς, 40 έδωσαν και «Διακριτά Μαθηματικά» και «Πραγματική Ι», 90 κανένα από τα δύο μαθήματα, ενώ «Πραγματική Ι» έδωσαν 100. Πόσοι έδωσαν «Διακριτά Μαθηματικά»;

Απάντηση.

Αν συμβολίσουμε με M το σύνολο όλων των πρωτοετών μαθηματικών, με Δ το σύνολο των φοιτητών που έδωσαν Διακριτά Μαθηματικά και αντίστοιχα με Π το σύνολο των φοιτητών που έδωσαν Πραγματική Ι, η αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού δίνει:

$$|\overline{\Delta}||\overline{\Pi}| = |M| - |\Delta| - |\Pi| + |\Delta||\Pi|$$

Αντικαθιστώντας τις δοθείσες τιμές έχουμε μια εξίσωση για το $|\Delta|$ η οποία δίνει $|\Delta| = 150$.

9. (10 μον.) Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε την δύναμη της οποίας ο συντελεστής δίνει το πλήθος των ακέραιων λύσεων της εξίσωσης:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40$$

με τους περιορισμούς: $3 \leq x_1 \leq 8$, $0 \leq x_2 \leq 10$, $0 \leq x_3 \leq 20$, και $x_4 \geq 0$ άρτιος.

Απάντηση.

Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με τους τρόπους που μοιράζονται 40 μη διακεκριμένες μπάλες σε 4 υποδοχές με τους δοθέντες περιορισμούς. Η γεννήτρια συνάρτηση θα είναι λοιπόν

$$(x^3 + x^4 + \cdots + x^8)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{20})(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{40})$$

Σε αυτή θέλουμε τον συντελεστή του x^{40}.