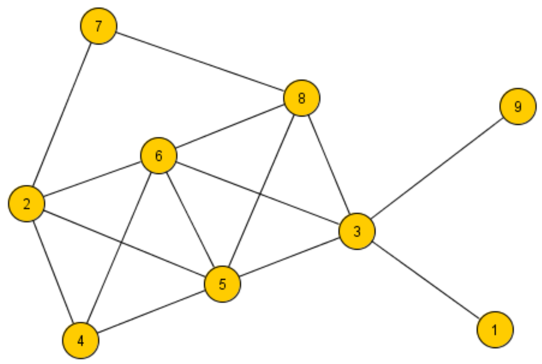
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2016

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος



1. (15 μον.) Στο παραπάνω γράφημα G απαντήστε (και εξηγήστε) τα ακόλουθα:

   i. Βρείτε τις κορυφές μέγιστου και ελάχιστου βαθμού.

   ii. Βρείτε ένα πλήρες υπογράφημα (κλίκα) με τον μεγαλύτερο αριθμό κορυφών.

   iii. Χωρίς να το σχεδιάσετε, πόσες ακμές έχει το συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$ του G;

   iv. Έχει το G κύκλο Euler; Αν ναι, βρείτε έναν. Αν όχι, προσθέστε στο G τον *ελάχιστο* αριθμό ακμών ώστε να αποκτήσει κύκλο Euler.

   v. Ποιος ο χρωματικός αριθμός του G;

Απάντηση.

   i. Ο μέγιστος βαθμός κορυφής στο G είναι 5 και τον έχουν οι κορυφές v_5, v_6 και v_3. Ο ελάχιστος είναι 1 και τον έχουν οι κορυφές v_1 και v_9.

   ii. Οι κορυφές v_2, v_4, v_5, v_6 συνιστούν ένα πλήρες γράφημα μεγέθους 4, ενώ δεν υπάρχει πλήρες γράφημα μεγέθους 5 ή μεγαλύτερο.

   iii. Το συμπληρωματικό γράφημα $\overline{G}$ του G έχει τις ακμές που λείπουν από το G για να γίνει το πλήρες γράφημα μεγέθους 9, δηλαδή το K_9. Το K_9 ως γνωστόν έχει $9*8/2 = 36$ ακμές ενώ το G έχει 15 ακμές. Συνεπώς το $\overline{G}$ θα έχει 21 ακμές.

   iv. Το G δεν έχει κύκλο Euler διότι έχει κορυφές περιττού βαθμού, τις $v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9$. Αυτές είναι 6. Αν τις χωρίσουμε σε 3 ζευγάρια μπορούμε να ενώσουμε τις αντίστοιχες κορυφές με μία ακμή και να αποκτήσουν όλες άρτιο βαθμό. Άρα χρειαζόμαστε (και αρκούν) 3 ακμές.

   v. Το G μπορεί να χρωματιστεί με 4 χρώματα και η ύπαρξη ενός τουλάχιστον K_4 σαν υπογράφημα αποκλείει τον χρωματισμό του με 3 χρώματα. Άρα ο χρωματικός του αριθμός είναι 4.

2. (15 μον.) Έστω G ένα γράφημα με χρωματικό αριθμό $k \geq 2$ και έστω κάποιος νόμιμος χρωματισμός του G με k χρώματα. Στον χρωματισμό αυτό, V_1 και V_2 είναι δύο σύνολα κορυφών που περιλαμβάνουν το κάθε ένα όλες τις κορυφές που είναι χρωματισμένες με το ίδιο χρώμα (δηλαδή όλες οι κορυφές στο V_1 έχουν το ίδιο χρώμα και όλες στο V_2 έχουν επίσης όλες το ίδιο χρώμα, διαφορετικό από αυτό του V_1). (i) Δείξτε ότι το σύνολο $V_1 \cup V_2$ δεν είναι σύνολο ανεξαρτησίας. (ii) Βασιζόμενοι στο (i) δείξτε ότι το G έχει τουλάχιστον $k(k-1)/2$ ακμές.

   Απάντηση.

   (i) Εφόσον τα V_1 και V_2 περιλαμβάνουν το καθένα όλες τις κορυφές με κάποιο χρώμα, διαφορετικό από το χρώμα των κορυφών του άλλου συνόλου, αν το $V_1 \cup V_2$ ήταν σύνολο ανεξαρτησίας, δηλαδή δεν υπήρχε καμία ακμή μεταξύ οποιονδήποτε δύο κορυφών του $V_1 \cup V_2$, θα μπορούσαμε να χρωματίσουμε όλες τις κορυφές του $V_1 \cup V_2$ με ένα και μόνο χρώμα, δηλαδή θα χρειαζόμασταν $k-1$ χρώματα για τον χρωματισμό του G, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το ότι ο χρωματικός του αριθμός είναι k.

   (ii) Εφόσον, όπως δείξαμε παραπάνω υπάρχει μία τουλάχιστον ακμή μεταξύ κάποιας κορυφής του V_1 και κάποιας του V_2 και αυτό συμβαίνει για οποιεσδήποτε δύο χρωματικές ομάδες V_i και V_j οι οποίες είναι k, συμπεραίνουμε ότι οι ακμές του G είναι *τουλάχιστον* όσες οι ακμές μιας κλίκας K_k, που είναι $k(k-1)/2$.

3. (10 μον.) Υπάρχει γράφημα που έχει τόσο κύκλο Euler όσο και κύκλο Hamilton και δεν είναι διμερές; Αν όχι, εξηγήστε γιατί. Αν ναι, σχεδιάστε ένα τέτοιο γράφημα.

   Απάντηση.

   Το C_5 είναι π.χ. ένα τέτοιο γράφημα. Έχει (προφανώς) και κύκλο Euler και κύκλο Hamilton ενώ δεν είναι διμερές (είναι περιττός κύκλος).

4. (10 μον.) Έστω p, q και r προτασιακές μεταβλητές. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν; Αιτιολογήστε.

   i. Ο τύπος $((q \to p) \wedge (\neg p \to r)) \to (q \to r)$ είναι ταυτολογία.
   ii. Ο τύπος $(p \to q) \vee (q \to p)$ είναι ταυτολογία.
   iii. Ο τύπος $\forall x \exists y \exists z (y \neq z \wedge P(x,y) \wedge P(y,z))$ αληθεύει στο σύνολο των φυσικών όπου το κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ ερμηνεύεται σαν ο «x είναι μικρότερος του y».
   iv. Ο παραπάνω τύπος (του (iii)) αληθεύει στο γράφημα $C_n, n \geq 5$ (κύκλος με n κορυφές) όπου το κατηγορηματικό σύμβολο $P(x,y)$ ερμηνεύεται σαν «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή».

   Απάντηση.

   i. Ψευδής. Αν επιχειρήσουμε να κάνουμε τον τύπο ψευδή, θα πρέπει ο υποτύπος $(q \to r)$ να είναι ψευδής και ο υποτύπος $(q \to p) \wedge (\neg p \to r)$ αληθής. Αυτό γίνεται όταν η q είναι αληθής και η r ψευδής. Για να γίνει ο $(q \to p) \wedge (\neg p \to r))$ αληθής πρέπει η μεταβλητή p να είναι επίσης αληθής, πράγμα δυνατό. Άρα δεν έχουμε ταυτολογία.
   ii. Αληθής. Για να γίνει ψευδής ο τύπος πρέπει να είναι η μεταβλητή p αληθής και η q ψευδής. Τότε όμως ο υποτύπος $q \to p$ γίνεται αληθής, άρα και όλος ο τύπος.
   iii. Αληθής. Η ερμηνεία του τύπου είναι «Για κάθε φυσικό x, υπάρχουν 2 διαφορετικοί μεταξύ τους φυσικοί που ο ένας είναι μεγαλύτερος του x και ο δεύτερος μεγαλύτερος αυτού.

iv. Αληθής. Με βάση την παραπάνω ερμηνεία, για κάθε κορυφή x του C_n, ζητάμε 2 διαφορετικές κορυφές που να συνδέονται μεταξύ τους και η μία από αυτές με την x. Προφανώς οι 2 διαδοχικές (προς κάποια φορά) κορυφές της x είναι οι ζητούμενες.

5. (10 μον.) Έστω η δομή με σύμπαν το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$, ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο «$'$», δύο διμελή συναρτησιακά «$\otimes$» και «$\oplus$» και το σύμβολο σταθεράς 0. Ερμηνεύουμε το «$'$» σαν την συνάρτηση «επόμενος» , (δηλαδή $x' = x + 1$), το $\oplus$ σαν την πρόσθεση και το $\otimes$ σαν τον πολλαπλασιασμό. Τέλος, ερμηνεύουμε το «0» σαν τον φυσικό 0.

   (i) Στην παραπάνω δομή δώστε τύπο $\varphi(x)$ με ερμηνεία «Ο φυσικός x είναι πρώτος αριθμός».

   (ii) Στην παραπάνω δομή δώστε πρόταση ψ με ερμηνεία «Κάθε άρτιος φυσικός μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα δύο πρώτων». (Η πρόταση αυτή είναι γνωστή σαν εικασία του Goldbach.)

   Απάντηση.

   (i) Ο υποτύπος $\varphi_1(v, u) = \exists w(u \approx v \otimes w)$ έχει ερμηνεία «ο v διαιρεί τον u». Με την βοήθεια αυτού ο ζητούμενος τύπος γράφεται:

$$\varphi(x) = x \not\approx 0 \wedge x \not\approx 0' \wedge \forall s(\varphi_1(s, x) \to s \approx 0' \vee s \approx x)$$

   (ii) Με την βοήθεια των δύο παραπάνω τύπων γράφουμε.

$$\psi = \forall x(x \not\approx 0 \wedge x \not\approx 0' \wedge \varphi_1(0'', x) \to \exists y \exists z(\varphi(y) \wedge \varphi(z) \wedge x \approx y \oplus z))$$

6. (20 μον.) Στο κουίζ των Διακριτών Μαθηματικών μπορούν να «πέσουν»

   (α) ασκήσεις Σωστό/Λάθος όπου ο φοιτητής μπορεί να απαντήσει σε μία ερώτηση είτε «Σωστό» είτε «Λάθος» είτε να μην απαντήσει κάτι,

   (β) ασκήσεις Αντιστοίχησης που κάθε μία έχει 4 προτάσεις και 4 απαντήσεις και κάθε πρόταση πρέπει να αντιστοιχηθεί (μία προς μία) με μία απάντηση και

   (γ) ασκήσεις Πολλαπλής Επιλογής όπου κάθε ερώτηση έχει 4 πιθανές απαντήσεις από τις οποίες μπορούν να επιλεγούν από καμία μέχρι και οι 4.

   Πόσες είναι οι πιθανές απαντήσεις που μπορεί να δώσει ένας φοιτητής που απαντά τυχαία στις ακόλουθες περιπτώσεις;

   i. Το κουίζ αποτελείται μόνο από 10 ερωτήσεις Σωστό/Λάθος.

   ii. Το κουίζ αποτελείται μόνο από 10 ερωτήσεις Αντιστοίχησης.

   iii. Το κουίζ αποτελείται μόνο από 10 ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής.

   iv. Το κουίζ αποτελείται από 5 ερωτήσεις Σωστό/Λάθος, 3 ερωτήσεις Αντιστοίχησης και 2 Πολλαπλής Επιλογής.

   v. Το κουίζ αποτελείται μόνο από 10 ερωτήσεις Σωστό/Λάθος αλλά ο φοιτητής είναι αποφασισμένος να απαντήσει «Σωστό» σε 5 από αυτές και «Λάθος» στις υπόλοιπες.

   Απάντηση.

   Οι επιλογές για μία άσκηση Σωστό/Λάθος είναι 3. Οι επιλογές για μια άσκηση Αντιστοίχησης είναι 4!, επειδή είναι ισοδύναμο με τις μεταθέσεις 4 αντικειμένων. Τέλος, οι επιλογές μιας άσκησης Πολλαπλής Επιλογής είναι όσες τα υποσύνολα ενός συνόλου με 4 στοιχεία, δηλαδή

$2^4 = 16$, μια και μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε υποσύνολο από τις 4 απαντήσεις. Με βάση αυτές τις παρατήσεις και τον κανόνα του γινομένου (ή αλλιώς από τον τύπο των διατάξεων με επανάληψη) έχουμε.

i. 3^{10}

ii. $(4!)^{10}$

iii. 16^{10}

iv. $3^5 \cdot (4!)^3 \cdot 16^2$

v. Σε αυτή την περίπτωση ο φοιτητής πρέπει να επιλέξει τις 5 ερωτήσεις που θα χαρακτηρίσει σαν αληθείς. Οι άλλες θα είναι ψευδείς. Οι τρόποι είναι $\binom{10}{5}$.

7. (10 μον.) Επιλέγουμε ένα υποσύνολο του συνόλου $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ τυχαία και ισοπίθανα (μεταξύ όλων των υποσυνόλων του A). Ποιά η πιθανότητα το υποσύνολο που επιλέξαμε να περιέχει το 2 και το 6;

Απάντηση.

Τα υποσύνολα του A είναι 2^{10}. Ένα υποσύνολο του A που περιλαμβάνει τα στοιχεία 2 και 6, σχηματίζεται με την ένωση στο $\{2, 6\}$ οποιουδήποτε υποσυνόλου (και του κενού) από τα υπόλοιπα 8 στοιχεία. Συνεπώς τα υποσύνολα του A που περιλαμβάνουν τα στοιχεία 2 και 6 είναι 2^8. Άρα η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα από αυτά είναι $2^8/2^{10}$=1/4.

8. (10 μον.) Ποιος είναι ο συντελεστής του x^4 στην παράσταση $(2x^3 + \frac{3}{x})^6$;

Απάντηση.

Έχουμε:

$$\left(2x^3 + \frac{3}{x}\right)^6 = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} 2^i x^{3i} \frac{3^{6-i}}{x^{6-i}} = \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} 2^i 3^{6-i} x^{4i-6}$$

Ο όρος x^4 βρίσκεται όταν $4i - 6 = 4$. Παρατηρούμε όμως ότι για κανένα φυσικό δεν ικανοποιείται η εξίσωση αυτή. Άρα ο συντελεστής του x^4 είναι 0.

9. (10 μον.) Σε 3 διακεκριμένα δοχεία θέλουμε να τοποθετήσουμε 40 συνολικά όμοιες σοκολάτες έτσι ώστε κάθε δοχείο να έχει 8, 12,16 ή 20 σοκολάτες. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση για το πλήθος των τρόπων που μπορεί να γίνει αυτή η τοποθέτηση και *υπολογίστε* τον συντελεστή της δύναμης που δίνει αυτό το πλήθος.

Απάντηση.

Ο απαριθμητής για κάθε δοχείο είναι $x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20}$. Συνεπώς η γεννήτρια συνάρτηση είναι $(x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20})^3$. Σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{40}. Για να τον υπολογίσουμε παρατηρούμε ότι

$$(x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20})^3 = x^{24}(1 + x^4 + x^8 + x^{12})^3$$

Ισοδύναμα λοιπόν ζητάμε τον συντελεστή του x^{16} στην παράσταση $(1 + x^4 + x^8 + x^{12})^3$ ή του y^4 στην παράσταση $(1 + y + y^2 + y^3)^3$. Οπότε:

$$(1 + y + y^2 + y^3)^3 = (1 + y)^3(1 + y^2)^3 = (1 + 3y + 3y^2 + y^3)(1 + 3y^2 + 3y^4 + y^6)$$

Από τον πρώτο παράγοντα μόνο το 1 και το $3y^2$ δίνουν άρτια δύναμη, και συνεπώς

$$(1 + y + y^2 + y^3)^3 = \cdots + 3y^4 + 9y^4 + \cdots = \cdots + 12y^4 + \cdots$$

Άρα οι τρόποι διανομής είναι 12.