Ονοματεπώνυμο:.. ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

B

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2016

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.

   i. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών την (6, 4, 4, 3, 2, 1).

   ii. Το συμπληρωματικό γράφημα επίπεδου γραφήματος είναι επίπεδο.

   iii. Αν ένα γράφημα έχει χρωματικό αριθμό k, τότε κάθε υπογράφημα του έχει χρωματικό αριθμό k.

   iv. Σε ένα απλό γράφημα με κύκλους Euler και Hamilton, ο κύκλος Euler έχει τουλάχιστον τόσες ακμές όσες και ο κύκλος Hamilton.

   v. Υπάρχει διμερές γράφημα που περιλαμβάνει το K_4 σαν υπογράφημα.

   Απάντηση.

   i. Ψευδής. Επειδή ζητείται επίπεδο γράφημα, η κορυφή βαθμού 6 θα πρέπει να συνδέεται με άλλες 6 κορυφές. Όμως αυτές δεν υπάρχουν.

   ii. Ψευδής. Π.χ. ένα γράφημα που αποτελείται από 5 μεμονωμένες κορυφές, έχει σαν συμπληρωματικό το K_5.

   iii. Ψευδής. Ένα τετριμμένο υπογράφημα ενός οποιουδήποτε γραφήματος είναι μία μεμονωμένη κορυφή. Αυτή έχει φυσικά χρωματικό αριθμό 1, ενώ αν το γράφημα έχει έστω και μία ακμή, τότε έχει χρωματικό αριθμό από 2 και πάνω.

   iv. Αληθής. Ο κύκλος Euler, αν υπάρχει, σε ένα γράφημα περιλαμβάνει υποχρεωτικά όλες τις ακμές του γραφήματος ενώ ο κύκλος Hamilton, αν υπάρχει, περιλαμβάνει τόσες ακμές όσες και οι κορυφές του γραφήματος.

   v. Ψευδής. το K_4 περιλαμβάνει τρίγωνο ενώ ένα διμερές γράφημα δεν περιλαμβάνει κύκλο περιττού μήκους.

2. (10 μον) (i) Δώστε τον πίνακα γειτνίασης A του κύκλου με 7 κορυφές C_7. (Αριθμήστε τις κορυφές κυκλικά.) (ii) Χωρίς να εκτελέσετε πολλαπλασιασμό πινάκων βρείτε τον A^2.

   Απάντηση

   (i) Ο πίνακας γειτνίασης είναι ο

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) ενώ το τετράγωνο του

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ο τελευταίος δημιουργήθηκε με βάση την γνωστή ιδιότητα της k-οστης δύναμης του πίνακα γειτνίασης A. Συγκεκριμένα, ο πίνακας A^k έχει στην θέση (i, j) το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων μήκους k από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j. Έτσι ο A^2 του C_7 θα έχει στην διαγώνιο παντού 2 διότι υπάρχουν ακριβώς δύο περίπατοι από μια κορυφή πίσω στον εαυτό της. Π.χ. για την v_1 υπάρχουν οι δύο περίπατοι $v_1 - v_2 - v_1$ και $v_1 - v_7 - v_1$. Στις θέσεις (i, j) όπου v_i, v_j γειτονικές κορυφές, θα υπάρχουν 0 διότι δεν υπάρχει κανένας περίπατος με μήκος ακριβώς 2 μεταξύ τέτοιων κορυφών. Παρόμοια και μεταξύ κορυφών που απέχουν 3 ή περισσότερο στον κύκλο. Τέλος, θα υπάρχουν 1 μεταξύ κορυφών με απόσταση ακριβώς 2 στον κύκλο, όπως π.χ. οι v_1 και v_3.

3. (10 μον.) Δείξτε ότι αν ένα γράφημα G έχει τόσο αυτό όσο και το συμπληρωματικό του κύκλο Euler, τότε το G έχει περιττό πλήθος κορυφών.

   Απάντηση.

   Εφόσον και το G και το συμπληρωματικό του έχουν κύκλους Euler θα πρέπει οι βαθμοί των κορυφών τους να είναι άρτιοι. Όμως το άθροισμα των βαθμών που έχει μία κορυφή στο G και στο συμπληρωματικό του είναι προφανώς όσο ο βαθμός της αντίστοιχης κλίκας, δηλαδή $n - 1$. Αν λοιπόν το $n - 1$ είναι άρτιος αριθμός, το n είναι προφανώς περιττός.

4. (10 μον.) Για ποιες τιμές των n και m έχει το πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$ κύκλο Hamilton;

   Απάντηση.

   Ο κύκλος Hamilton διέρχεται από όλες τις κορυφές ενός γραφήματος. Επειδή μία ακμή σε ένα διμερές γράφημα έχει τα δύο άκρα της σε διαφορετικά μέρη του γραφήματος, έπεται ότι ο κύκλος Hamilton επισκέπτεται εναλλάξ μία κορυφή του ενός μέρους (με πληθάριθμο n) και μία του άλλου (με πληθάριθμο m). Συνεπώς αναγκαστικά $n = m$ και προφανώς για να έχουμε τον ελάχιστο κύκλο $n, m \geq 2$.

5. (10 μον.) Έστω φ, ψ προτασιακοί τύποι. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν; Αιτιολογήστε.

   i. $\models \varphi \to ((\psi \to \neg\varphi) \to \varphi)$

   ii. $\psi \models \neg\psi \to \neg\varphi$

   iii. Αν ισχύει ότι $\varphi \vdash \neg\psi$ τότε ισχύει και ότι $\psi \models \neg\varphi$.

   iv. Αν ο φ είναι ταυτολογία τότε ισχύει ότι $\varphi \vdash \psi$.

   Απάντηση.

   i. Αληθής. Από το Θεώρημα Εγκυρότητας αρκεί να επιβεβαιώσουμε ότι ο τύπος είναι τυπικό θεώρημα. Από την μορφή του ο τύπος προέρχεται από το ΑΣ1 με αντικατάσταση του $\psi \to \neg\varphi$ στη θέση του ψ. Άρα είναι ταυτολογία.

   ii. Αληθής. Όταν αληθεύει το ψ, τότε η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι ψευδής και άρα η συνεπαγωγή αληθής. Συνεπώς ισχύει η ταυτολογική συνεπαγωγή.

   iii. Αληθής. Αν ισχύει ότι $\varphi \vdash \neg\psi$ τότε από το Θεώρημα Εγκυρότητας ισχύει και ότι $\varphi \models \neg\psi$ και άρα και $\psi \models \neg\varphi$.

   iv. Ψευδής. Για να ισχύει θα πρέπει και ο ψ να είναι ταυτολογία, κάτι που δεν δίνεται.

6. (10 μον.) Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο G με ερμηνεία «$G(x,y)$: οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή», καθώς και με δύο μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα A και M με ερμηνεία «$A(x)$ (αντίστοιχα $M(x)$): η κορυφή x είναι χρωματισμένη κόκκινη (αντίστοιχα, μαύρη)»

   Στην γλώσσα αυτή γράψτε ένα τύπο που να δηλώνει: «Αν δύο κορυφές είναι γειτονικές, τότε έχουν διαφορετικό χρώμα»

   Απάντηση.

   $$\forall x \forall y (G(x,y) \to (A(x) \wedge \neg M(x) \wedge M(y) \wedge \neg A(y)) \vee (M(x) \wedge \neg A(x) \wedge A(y) \wedge \neg M(y)))$$

   Σημείωση. Είναι απαραίτητο να δηλωθεί ότι μία κορυφή είναι «μονοχρωματική» δηλαδή έχει χρωματιστεί με ένα και μόνο χρώμα, καθώς αυτό δεν προκύπτει από τα κατηγορήματα.

7. (10 μον.) Γίνεται δειγματοληπτικός έλεγχος σε 50 οχήματα με επιλογή για έλεγχο 5 από αυτά. Ποια η πιθανότητα να βρεθεί ελαττωματικό όχημα αν γνωρίζουμε ότι 3 οχήματα είναι ελαττωματικά;

   Απάντηση.

   Το πλήθος όλων των 5-αδων οχημάτων που είναι ο δειγματοχώρος μας, είναι $\binom{50}{5}$ ενώ οι 5-αδες που δεν περιλαμβάνουν κανένα ελαττωματικό όχημα είναι $\binom{47}{5}$. Οι υπόλοιπες συνεπώς θα έχουν ένα τουλάχιστον ελαττωματικό όχημα και άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\binom{50}{5}-\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}}$.

8. (25 μον.) Μία εφαρμογή δέχεται κωδικούς (passwords) μήκους ακριβώς 20 χαρακτήρων στους οποίους μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα 26 μικρά λατινικά γράμματα και τα 10 αριθμητικά ψηφία.

   i. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός;
   ii. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν πρέπει οπωσδήποτε να χρησιμοποιηθεί ένα τουλάχιστον γράμμα και ένα τουλάχιστον ψηφίο;
   iii. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν πρέπει να χρησιμοποιηθούν μόνο το a 5 φορές, το b 4, το c 4, το d 3 φορές και τα ψηφία 0 και 1 από 2 φορές;
   iv. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν πρέπει να χρησιμοποιηθούν ακριβώς 5 ψηφία;
   v. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν πρέπει να χρησιμοποιηθούν ακριβώς 5 ψηφία αλλά όχι σε διαδοχικές θέσεις; (*Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα πόσες είναι οι επιλογές 5 μη διαδοχικών θέσεων στις 20*)

   Απάντηση

   i. 36^{20}. Πρόκειται για διατάξεις με επανάληψη των 36 ανά 20.
   ii. Οι κωδικοί που έχουν μόνο γράμματα είναι 26^{20} ενώ όσοι έχουν μόνο ψηφία είναι 10^{20}. Αυτοί πρέπει να εξαιρεθούν από το σύνολο. Άρα το ζητούμενο πλήθος κωδικών είναι $36^{20} - 26^{20} - 10^{20}$.
   iii. Στην περίπτωση αυτή τα διάφορα σύμβολα ανήκουν σε ομάδες μη διακεκριμένων μεταξύ τους σοιχείων με αντίστοιχους πληθάριθμους. Το πλήθος των μεταθέσεων τους είναι $\frac{20!}{5!4!4!3!2!2!}$.
   iv. Οι επιλογές για τις θέσεις των 5 ψηφίων είναι $\binom{20}{5}$. Για κάθε μία από αυτές, στις 15 θέσεις των γραμμάτων μπορούν να τοποθετηθούν 15 από τα 26 γράμματα με επανάληψη με 26^{15} τρόπους. Παρόμοια στις 5 θέσεις των ψηφίων έχουμε 10^5 δυνατότητες. Συνολικά λοιπόν, έχουμε $\binom{20}{5}26^{15}10^5$ διαφορετικούς κωδικούς.
   v. Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη με την προηγούμενη μόνο που τώρα οι επιλογές για τις θέσεις των 5 ψηφίων υπολογίζονται διαφορετικά. Συγκεκριμένα, δεσμεύουμε μία θέση ανάμεσα από κάθε θέση ψηφίου ώστε να έχουμε ένα τουλάχιστον γράμμα ανάμεσα από δύο ψηφία. Απομένουν 20-5-4=11 θέσεις γραμμάτων προς διανομή. Αυτές ισοδυναμούν με μη διακεκριμένα σφαιρίδια που μπορούν να διανεμηθούν στις 6 «υποδοχές» που σχηματίζονται ανάμεσα και πριν και μετά τα ψηφία. Οι δυνατότητες είναι $\binom{11+6-1}{11} = \binom{16}{11}$. Συνολικά λοιπόν έχουμε $\binom{16}{11}26^{15}10^5$ κωδικούς.

9. (10 μον.) Δείξτε την παρακάτω σχέση χρησιμοποιώντας το δυωνυμικό Θεώρημα.

$$4^n = \sum_{k=0}^{n} 3^k \binom{n}{k}$$

   Απάντηση

   Το δυωνυμικό θεώρημα είναι $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Θέτοντας $x = 3$ και $y = 1$, έχουμε το ζητούμενο.

10. (10 μον.) Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε την δύναμη της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των ακέραιων και μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης:

$$x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 100$$

Απάντηση.

Θέτοντας $y_1 = x_1$, $y_2 = 5x_2$, $y_3 = 4x_3$ και $y_4 = 3x_4$ ζητάμε το πλήθος των ακέραιων και μη αρνητικών λύσεων της εξίσωσης $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 100$ όπου όμως το y_2 είναι πολλαπλάσιο του 5, το y_3 πολλαπλάσιο του 4 και το y_4 πολλαπλάσιο του 3. Η γεννήτρια είναι συνεπώς:

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{100})(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{100})(1+x^4+x^8+\cdots+x^{100})(1+x^3+x^6+\cdots+x^{99})$$

Αναζητούμε δε τον συντελεστή του x^{100}.