Ονοματεπώνυμο:.. ....
Τμήμα:....................Διδάσκων:... ....
(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

Α

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουνίου 2016

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.

   i. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών την (5, 4, 4, 2, 1, 0).

   ii. Αν το G έχει κύκλο Hamilton και προσθέσουμε σε αυτό μία ακμή, το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Hamilton.

   iii. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα με 10 κορυφές, 11 ακμές και 5 όψεις.

   iv. Αν ο μέγιστος βαθμός ενός γραφήματος είναι 5, τότε αυτό μπορεί να χρωματιστεί με 6 χρώματα.

   v. Υπάρχει απλό γράφημα με περισσότερες γέφυρες από ότι σημεία τομής

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Η κορυφή βαθμού 5 πρέπει να συνδέεται με 5 άλλες κορυφές μια και το γράφημα είναι απλό. Όμως δεν υπάρχουν τόσες επειδή η τελευταία έχει βαθμό 0.

   ii. Αληθής. Η προσθήκη της ακμής δεν επηρεάζει την ύπαρξη του κύκλου Hamilton. Hamilton.

   iii. Ψευδής. Αν υπήρχε θα έπρεπε να επαληθεύει τον τύπο του Euler που για τις συγκεκριμένες τιμές γίνεται 10+5=11+2 που προφανώς δεν ισχύει.

   iv. Αληθής. Είναι απευθείας πόρισμα του «λαίμαργου» αλγόριθμου χρωματισμού γραφημάτων ότι $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, όπου $\Delta(G)$ ο μέγιστος βαθμός του γραφήματος.

   v. Αληθής. Π.χ. το K_2 έχει 0 σημεία κοπής και 1 γέφυρα.

2. (10 μον) (i) Δώστε τον πίνακα γειτνίασης A του K_7. (Αριθμήστε τις κορυφές κυκλικά.) (ii) Χωρίς να εκτελέσετε πολλαπλασιασμό πινάκων βρείτε τον A^2.

   Απάντηση

   (i) Ο πίνακας γειτνίασης είναι ο

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii) ενώ το τετράγωνο του

$$A^2 = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ο τελευταίος υπολογίστηκε με βάση την γνωστή ιδιότητα του πίνακα γειτνίασης, δηλαδή ότι η k-οστη δύναμη του έχει στην θέση (i, j) το πλήθος των διαφορετικών περιπάτων από την κορυφή v_i στην κορυφή v_j. Συνεπώς στην διαγώνιο θα υπάρχουν παντού 6 διότι υπάρχουν 6 διαδρομές μήκους 2 από μία κορυφή πίσω στον εαυτό της (μετάβαση σε μια οποιαδήποτε άλλη γειτονική και πάλι πίσω). Κάθε κορυφή έχει 6 γείτονες στο K_7. Σε οποιαδήποτε άλλη θέση θα υπάρχει 5 διότι από μία κορυφή μεταβαίνουμε σε μία άλλη με μονοπάτι μήκους 2, μέσω μιας οποιαδήποτε άλλης κορυφής από τις 5.

3. (10 μον.) Έστω M ο πίνακας πρόσπτωσης του πλήρους γραφήματος K_n. Δείξτε ότι ο M έχει $3\binom{n}{3}$ μηδενικά.

   Απάντηση

   Ο πίνακας πρόσπτωσης ενός γραφήματος έχει τόσες στήλες όσες οι ακμές του ενώ κάθε στήλη έχει ακριβώς δύο 1 και $n-2$ 0. Το K_n έχει $n(n-1)/2$ στήλες και άρα συνολικά έχει $n(n-1)(n-2)/2$ 0. Αυτή η ποσότητα είναι ίση με την ζητούμενη.

4. (10 μον.) Για ποιες τιμές των n και m έχει το πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$ κύκλο Euler;

   Απάντηση

   Ο βαθμός των κορυφών στο τμήμα με τις n κορυφές είναι m, ενώ στο τμήμα με τις m κορυφές, n. Για να έχει ένα γράφημα κύκλο Euler πρέπει να είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή του να έχει άρτο βαθμό. Συνεπώς θα πρέπει $n, m \geq 2$ και άρτιοι.

5. (10 μον.) Έστω φ, ψ αυθαίρετα επιλεγμένοι τύποι. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις αληθεύουν; Αιτιολογήστε.

   i. $\neg\varphi \models \neg\psi \to \neg\varphi$

   ii. $\varphi \to \varphi \models \varphi \to \psi$

iii. Αν ισχύει ότι $\varphi \vdash \neg\psi$ τότε ο τύπος $\psi \to \neg\varphi$ είναι ταυτολογία.
iv. Ισχύει ότι $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$.

Απάντηση

i. Αληθής. Όταν ο τύπος $\neg\varphi$ αληθεύει και ο τύπος $\neg\psi \to \neg\varphi$ αληθεύει, επειδή ο $\neg\varphi$ είναι στο συμπέρασμα της συνεπαγωγής.
ii. Ψευδής. Ο τύπος $\varphi \to \varphi$ είναι ταυτολογία ενώ ο $\varphi \to \psi$ αληθεύει κατά περίπτωση.
iii. Αληθής. Αν ισχύει ότι $\varphi \vdash \neg\psi$ τότε από το Θεώρημα Εγκυρότητας $\varphi \models \neg\psi$ και άρα $\varphi \to \neg\psi$ ταυτολογία οπότε και ο τύπος $\psi \to \neg\varphi$ είναι ταυτολογία (αντιστροφοαντίθετη πρόταση).
iv. Αληθής. Το σύνολο $\{\psi, \neg\psi\}$ είναι αντιφατικό, οπότε από αυτό αποδεικνύεται κάθε τύπος.

6. (10 μον.) Θεωρούμε πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο G με ερμηνεία «$G(x, y)$: οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή», καθώς και με δύο μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα A και M με ερμηνεία «$A(x)$ (αντίστοιχα $M(x)$): η κορυφή x είναι χρωματισμένη κόκκινη (αντίστοιχα, μαύρη)»

   Στην γλώσσα αυτή γράψτε ένα τύπο που να δηλώνει: «Αν μια κορυφή είναι απομονωμένη, τότε είναι κόκκινη και αν έχει τουλάχιστον ένα γείτονα, τότε είναι μαύρη».

   Απάντηση

$$\forall x((\forall y \neg G(x, y) \to A(x) \land \neg M(x)) \land (\exists y G(x, y) \to M(x) \land \neg A(x)))$$

   Σημείωση: Είναι απαραίτητο να δηλωθεί ότι αν μία κορυφή είναι κόκκινη τότε δεν είναι μαύρη (και το αντίστροφο) διότι αυτό, αν και προφανές διαισθητικά, δεν είναι αναγκαστικά και ιδιότητα των κατηγορημάτων A και M. Παρόμοια, είναι απαραίτητο να δηλωθεί και τι συμβαίνει όταν η η κορυφή x δεν έχει γείτονα και τι όταν έχει. Δηλαδή, δεν είναι άμεσο ότι θα συμβαίνει το αντίθετο.

7. (25 μον.) Μία εφαρμογή δέχεται κωδικούς (passwords) μήκους ακριβώς 20 χαρακτήρων στους οποίους μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα 26 μικρά λατινικά γράμματα και τα 10 αριθμητικά ψηφία.

   i. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός;
   ii. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν πρέπει οπωσδήποτε να χρησιμοποιηθεί ένα τουλάχιστον γράμμα και ένα τουλάχιστον ψηφίο;
   iii. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν πρέπει να χρησιμοποιηθούν μόνο το a 5 φορές, το b 4, το c 4, το d 3 φορές και τα ψηφία 0 και 1 από 2 φορές;
   iv. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν πρέπει να χρησιμοποιηθούν ακριβώς 5 ψηφία;
   v. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί κωδικοί αν πρέπει να χρησιμοποιηθούν ακριβώς 5 ψηφία αλλά όχι σε διαδοχικές θέσεις; (*Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα πόσες είναι οι επιλογές 5 μη διαδοχικών θέσεων στις 20*)

Απάντηση

i. 36^{20}. Πρόκειται για διατάξεις με επανάληψη των 36 ανά 20.

ii. Οι κωδικοί που έχουν μόνο γράμματα είναι 26^{20} ενώ όσοι έχουν μόνο ψηφία είναι 10^{20}. Αυτοί πρέπει να εξαιρεθούν από το σύνολο. Άρα το ζητούμενο πλήθος κωδικών είναι $36^{20} - 26^{20} - 10^{20}$.

iii. Στην περίπτωση αυτή τα διάφορα σύμβολα ανήκουν σε ομάδες μη διακεκριμένων μεταξύ τους σοιχείων με αντίστοιχους πληθάριθμους. Το πλήθος των μεταθέσεων τους είναι $\frac{20!}{5!4!4!3!2!2!}$.

iv. Οι επιλογές για τις θέσεις των 5 ψηφίων είναι $\binom{20}{5}$. Για κάθε μία από αυτές, στις 15 θέσεις των γραμμάτων μπορούν να τοποθετηθούν 15 από τα 26 γράμματα με επανάληψη με 26^{15}. Παρόμοια στις 5 θέσεις των ψηφίων έχουμε 10^5 δυνατότητες. Συνολικά λοιπόν, έχουμε $\binom{20}{5}26^{15}10^5$ διαφορετικούς κωδικούς.

v. Η περίπτωση αυτή είναι ανάλογη με την προηγούμενη μόνο που τώρα οι επιλογές για τις θέσεις των 5 ψηφίων υπολογίζονται διαφορετικά. Συγκεκριμένα, δεσμεύουμε μία θέση ανάμεσα από κάθε θέση ψηφίου ώστε να έχουμε ένα τουλάχιστον γράμμα ανάμεσα από δύο ψηφία. Απομένουν 20-5-4=11 θέσεις γραμμάτων προς διανομή. Αυτές ισοδυναμούν με μη διακεκριμένα σφαιρίδια που μπορούν να διανεμηθούν στις 6 «υποδοχές» που σχηματίζονται ανάμεσα και πριν και μετά τα ψηφία. Οι δυνατότητες είναι $\binom{11+6-1}{11} = \binom{16}{11}$. Συνολικά λοιπόν έχουμε $\binom{11+6-1}{11} = \binom{16}{11}26^{15}10^5$.

8. (10 μον.) Επιλέγουμε τυχαία 5 χαρτιά από μια τράπουλα με 52 χαρτιά. Ποια η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένας άσσος στην 5-αδα μας; (Μια τράπουλα έχει 4 άσσους.)

Απάντηση

Το πλήθος όλων των 5-αδων χαρτιών που είναι ο δειγματοχώρος μας, είναι $\binom{52}{5}$ ενώ οι 5-αδες που δεν έχουν κανένα άσσο είναι $\binom{48}{5}$. Οι υπόλοιπες συνεπώς θα έχουν ένα τουλάχιστον άσσο και άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{\binom{52}{5}-\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}$.

9. (10 μον.) Δείξτε την παρακάτω σχέση χρησιμοποιώντας το δυωνυμικό Θεώρημα.

$$3^n = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$$

Απάντηση

Το δυωνυμικό θεώρημα είναι $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Θέτοντας $x = 2$ και $y = 1$, έχουμε το ζητούμενο.

10. (10 μον.) Ένας αρσιβαρίστας έχει διαθέσιμα απεριόριστα (πρακτικά) βάρη του 1 κιλού, 20 βάρη των 2 κιλών, 20 βάρη των 5 κιλών και 10 των 10 κιλών. Θέλουμε να βρούμε με πόσους τρόπους μπορεί να τοποθετήσει στην μπάρα συνολικό βάρος 140 κιλών. Σε κάθε άκρο της μπάρας προφανώς θα πρέπει να υπάρχει η ίδια κατανομή βαρών. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον εκθέτη ο συντελεστής του οποίου δίνει την απάντηση.

Απάντηση

Εφόσον η κατανομή των βαρών πρέπει να ίδια στα δύο άκρα της μπάρας, ζητάμε με πόσους τρόπους μπορούμε να έχουμε βάρος συνολικά 70 κιλά όταν τα διαθέσιμα βάρη μας είναι τα μισά από τα δοθέντα ώστε να υπάρχουν διαθέσιμα και για το άλλο άκρο της μπάρας. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι λοιπόν:

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{20})(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{50})(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{50})$$

ενώ ζητάμε τον συντελεστή του x^{70}.