

Όνοματεπώνυμο:.....

Τμήμα:.....Διδάσκων:.....

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2016

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.
 - i. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών την $(5, 5, 4, 3, 2, 1)$.
 - ii. Το γράφημα $K_{3,6}$ έχει κύκλο Euler.
 - iii. Ένα γράφημα που δεν έχει κύκλο Hamilton είναι αναγκαστικά μη επίπεδο
 - iv. Το $K_{n,m}$ έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν $n = m$.
 - v. Ο χρωματικός αριθμός του C_{21} (κύκλος 21 κορυφών) είναι 2.

Απάντηση.

- i. Ψευδής. Το γράφημα θα πρέπει να έχει 6 κορυφές και οι δύο κορυφές βαθμού 5 θα πρέπει αναγκαστικά να ενώνονται με όλες τις άλλες. Όμως τότε δεν θα μπορούσε να υπάρχει κορυφή βαθμού 1.
 - ii. Ψευδής. Οι 6 κορυφές στο ένα τμήμα του διμερούς γραφήματος θα πρέπει να ενώνονται με τις 3 κορυφές του άλλου τμήματος, άρα έχουν βαθμό 3, δηλαδή περιττό. Συνεπώς το γράφημα δεν έχει κύκλο Euler.
 - iii. Ψευδής. Το K_2 π.χ. (δύο κορυφές συνδεδεμένες με μια ακμή) είναι επίπεδο και δεν έχει κύκλο Hamilton.
 - iv. Αληθής. Ο κύκλος Hamilton σε ένα διμερές γράφημα θα πρέπει να έχει κορυφές που εναλλάσσονται μεταξύ των δύο μερών του γραφήματος. Άρα αναγκαστικά $n = m$.
 - v. Ψευδής, είναι 3 επειδή οι κορυφές είναι περιττές.
2. (10 μον) Έστω M ο πίνακας πρόσπτωσης του K_n . Δείξτε ότι το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του $M \cdot M^T$ είναι $n(n - 1)$.

Απάντηση. Μία γραμμή του πίνακα πρόσπτωσης ενός γραφήματος αντιστοιχεί σε μία κορυφή και έχει 1 σε στήλες που αντιστοιχούν σε ακμές των οποίων η κορυφή είναι άκρο. Το άθροισμα λοιπόν των στοιχείων μιας γραμμής ισούται με τον βαθμό της κορυφής. Όταν συνεπώς πολλαπλασιάσουμε τον M με τον ανάστροφο του, ένα στοιχείο της διαγωνίου προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο μιας γραμμής με τον εαυτό της, δηλαδή ισούται με τον βαθμό της κορυφής. Το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου είναι συνεπώς 2 φορές το πλήθος των ακμών, ή στην περίπτωση του K_n , $n(n - 1)$.

3. (10 μον.) Έστω G_1 και G_2 δύο γραφήματα και G_1' και G_2' τα συμπληρωματικά τους, αντίστοιχα. Δείξτε ότι αν το G_1 είναι ισόμορφο με το G_2' , τότε ισχύει ότι και το G_2 θα είναι ισόμορφο με το G_1' .

Απάντηση. Ως γνωστόν ισόμορφα γραφήματα έχουν και ισόμορφα συμπληρωματικά γραφήματα. Αν συνεπώς το G_1 είναι ισόμορφο με το G_2' , τότε και τα συμπληρωματικά τους, δηλαδή τα G_1' και $G_2'' = G_2$ αντίστοιχα, είναι συμπληρωματικά.

4. (10 μον.) Έστω p_1, p_2, p_3 προτασιακές μεταβλητές και φ, ψ προτασιακοί τύποι. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.

- i. Η αποτίμηση $\alpha(p_1) = \alpha(p_2) = A, \alpha(p_3) = \Psi$ κάνει ψευδή τον τύπο

$$(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_3))$$

- ii. Ισχύει ότι $(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow (\neg p_1 \rightarrow p_2)$.

- iii. Αν ισχύει ότι $\varphi \models \psi$ τότε ο αριθμός των αποτιμήσεων που ικανοποιούν τον φ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού των αποτιμήσεων που ικανοποιούν τον ψ .

- iv. Οι τύποι $\exists x \exists y (Q(x) \vee R(y))$ και $\exists x Q(x) \vee \exists y R(y)$ είναι ισοδύναμοι.

Απάντηση.

- i. Ο τύπος $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_3))$ με την δεδομένη αποτίμηση γίνεται ψευδής και συνεπώς όλος ο τύπος αληθής.

- ii. Αληθής. Ισχύει η ισοδυναμία όπως προκύπτει π.χ. από τους πίνακες αληθείας.

- iii. Ψευδής. Από τον ορισμό της ταυτολογικής συνεπαγωγής ισχύει ότι ο αριθμός των αποτιμήσεων που ικανοποιούν τον ψ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού των αποτιμήσεων που ικανοποιούν τον φ .

- iv. Αληθής. Ο πρώτος τύπος δηλώνει ότι υπάρχουν δύο στοιχεία στο σύμπαν (που μπορεί και να ταυτίζονται) που το ένα επαληθεύει το $Q(x)$ ή το άλλο το $Q(y)$. Αυτό ακριβώς δηλώνει και ο δεύτερος τύπος.

5. (10 μον.) Στην πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο G με ερμηνεία « $G(x, y)$: οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή», δίνεται ο τύπος:

$$\varphi = \exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge G(x, y) \wedge G(y, z) \wedge G(z, x) \wedge \exists w (G(w, x) \vee G(w, y) \vee G(w, z)))$$

- i. Εξηγήστε στην φυσική γλώσσα (στα Ελληνικά) τι λέει ο παραπάνω τύπος.

- ii. Ποια από τα γραφήματα $C_3, C_5,$ και K_5 ικανοποιούν τον τύπο;

Απάντηση.

- i. Υπάρχουν στο γράφημα 3 διαφορετικές κορυφές που ενώνονται μεταξύ τους και μία ακόμη κορυφή (που δεν αποκλείεται να είναι κάποια από τις 3) που συνδέεται με τουλάχιστον μία από τις 3.

- ii. Το C_3 και το K_5
6. (15 μον.) Ένας υδραυλικός διαθέτει 10 διαφορετικά εργαλεία.
- Πόσες επιλογές εργαλείων μπορεί να κάνει σε μια επίσκεψη; Θεωρούμε ότι πρέπει να έχει μαζί του τουλάχιστον ένα εργαλείο.
 - Πόσες επιλογές εργαλείων μπορεί να κάνει αν οπωσδήποτε πρέπει να έχει μαζί του τον Κάβουρα και το Μεγάλο Κατσαβίδι;
 - Πόσες επιλογές εργαλείων μπορεί να κάνει αν οπωσδήποτε πρέπει να έχει μαζί του τον Κάβουρα και το Μεγάλο Κατσαβίδι και διαζευκτικά (δηλαδή ακριβώς ένα από τα δύο) το Μικρό ή το Μεγάλο Σφυρί;

Απάντηση.

- Μπορεί να επιλέξει οποιοδήποτε υποσύνολο εκτός από το κενό από τα 10 εργαλεία που έχει στη διάθεση του, δηλαδή $2^{10} - 1$.
 - Τώρα απομένουν 8 εργαλεία, άρα οι επιλογές είναι μεταξύ όλων των υποσυνόλων αυτών (και του κενού), δηλαδή 2^8 .
 - Αν επιλεγεί το Μεγάλο Σφυρί δεν μπορεί να επιλεγεί το Μικρό και συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο από 6 εργαλεία, δηλαδή 2^6 επιλογές. Παρόμοια, αν επιλεγεί το Μικρό Σφυρί έχουμε άλλες 2^6 επιλογές. Ο κανόνας του αθροίσματος δίνει $2^6 + 2^6 = 2^7$ επιλογές.
7. (10 μον.) Το στάδιο μιας ποδοσφαιρικής ομάδας έχει 10 θύρες. Πριν από ένα ποδοσφαιρικό αγώνα πρόκειται να μοιραστούν στους φιλάθλους που μπαίνουν στο στάδιο, με τυχαίο τρόπο, 1000 πανομοιότυπα κασκόλ με το σήμα της ομάδας. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό αν κάθε θύρα έχει πάνω από 1000 θέσεις;

Απάντηση.

Εφόσον τα κασκόλ είναι ομοιόμορφα, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την διανομή 1000 όμοιων σφαιρών σε 10 διακεκριμένες υποδοχές. Επειδή κάθε θύρα έχει πάνω από 1000 θέσεις, μπορεί να διανεμηθούν σε αυτή από 0 έως και 1000 κασκόλ. Οι τρόποι είναι συνεπώς $\binom{10+1000-1}{1000}$.

8. (10 μον.) Μια πολυκατοικία έχει 5 ορόφους και 4 παράθυρα σε κάθε όροφο. (i) Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να είναι φωτισμένα 10 από τα παράθυρα της αν δύο τρόποι θεωρούνται διαφορετικοί αν έστω και ένα παράθυρο είναι φωτισμένο στον ένα τρόπο και σκοτεινό στον άλλο; (ii) Όλα τα παράθυρα είναι στην αρχή σκοτεινά και ανάβουν όλα ένα προς ένα διαδοχικά μέχρι να φωτιστούν όλα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Απάντηση.

(i) Έχουμε επιλογή 10 παραθύρων από τα 20. Οι τρόποι είναι $\binom{20}{10}$. (ii) Πρόκειται για μετάθεση των 20 αντικειμένων. Το πλήθος τους είναι $20!$.

9. (10 μον.) Δείξτε την παρακάτω σχέση για $1 \leq k \leq n$.

$$(n+1)_k = k! + k((n)_{k-1} + (n-1)_{k-1} + \dots + (k)_{k-1})$$

Απάντηση. Μπορούμε εύκολα να δείξουμε την σχέση

$$(n + 1)_k = (n)_k + k(n)_{k-1}$$

Με βάση αυτή, η ζητούμενη μπορεί ναδειχθεί επαγωγικά υποθέτοντας ότι $(n)_k = k! + k((n - 1)_{k-1} + (n - 2)_{k-1} + \dots + (k)_{k-1})$ και αντικαθιστώντας την τιμή του $(n)_k$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε το δεξί μέρος του ζητούμενου.

10. (10 μον.) Σε τέσσερα δημοτικά σχολεία μιας περιφέρειας πρόκειται να διανεμηθούν 200 πανομοιότυπα βιβλία έτσι ώστε το 1ο δημοτικό να πάρει τουλάχιστον 20 αντίτυπα, το δεύτερο από 10 έως 40, το τρίτο το πολύ 60 και το τέταρτο άρτιο αριθμό αντιτύπων. Για το πρόβλημα αυτό δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υπόδειξτε την δύναμη της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων διανομής.

Απάντηση. Χρησιμοποιούμε συνήθη γεννήτρια συνάρτηση με 4 απεριθμητές, ένα για κάθε σχολείο και με τους αντίστοιχους περιορισμούς. Σύμφωνα με αυτούς η γεννήτρια θα είναι:

$$(x^{20} + x^{21} + \dots + x^{200})(x^{10} + x^{11} + \dots + x^{40})(1 + x + x^2 + \dots + x^{60})(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{200})$$

ενώ ο ζητούμενος συντελεστής είναι του x^{200} .