B

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2015
Απαντήσεις

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Μ. Μπουντουρίδης, Π. Αλεβίζος

1. (10 μον) Έστω ότι έχετε γράψει σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού μία συνάρτηση που υπολογίζει την k-οστη δύναμη (το k είναι παράμετρος εισόδου) ενός αυθαίρετου πίνακα $n \times n$. Περιγράψτε πως θα χρησιμοποιούσατε αυτή τη συνάρτηση σε ένα πρόγραμμα που ελέγχει αν ένα γράφημα είναι συνεκτικό ή όχι. Στο πρόγραμμα σας διαβάζετε το γράφημα με τον πίνακα γειτνίασης.

   Απάντηση. Η k-οστη δύναμη του πίνακα γειτνίασης A ενός γραφήματος έχει ως γνωστόν στην θέση ij το πλήθος των διαδρομών μήκους ακριβώς k από την κορυφή i στην j. Βρίσκουμε λοιπόν *διαδοχικά* με την βοήθεια του υποπρογράμματος τις δυνάμεις A^k για $k = 1, 2, 3, \ldots$ μέχρι $k = n - 1$. Αθροίζουμε αυτούς τους πίνακες και πέρνουμε τον πίνακα $Y = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$. Αν ο πίνακας Y έχει έστω και ένα 0 (εκτός της διαγωνίου), έστω στη θέση ij αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κανένα μονοπάτι μήκους από 1 έως και $n - 1$ που να συνδέει τις κορυφές i και j. Όμως σε ένα γράφημα με n κορυφές αν δύο κορυφές είναι στην ίδια συνιστώσα θα συνδέονται με μονοπάτι μήκους $n - 1$ το πολύ.

2. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.

   i. Υπάρχει διμερές γράφημα με ακολουθία βαθμών (3, 2, 2, 2, 2, 1).
   ii. Αν το G είναι το μη επίπεδο γράφημα με τον ελάχιστο αριθμό ακμών, τότε έχει 5 κορυφές και 10 ακμές.
   iii. Σε ένα γράφημα με βάρη στις ακμές, η βαρύτερη ακμή δεν μετέχει σε κανένα ελάχιστο συνδετικό δένδρο.
   iv. Το συμπληρωματικό γράφημα του C_{17} (απλός κύκλος με 17 κορυφές) έχει κύκλο Euler.
   v. Υπάρχει απλό γράφημα με n κορυφές και n ακμές (n ≥ 3) που έχει κύκλο Hamilton και δεν έχει κύκλο Euler.

   Απάντηση.

   i. Αληθής. Το ένα σύνολο περιλαμβάνει τις κορυφές με βαθμούς 3, 1 και μία κορυφή βαθμού 2.
   ii. Ψευδής. Το $K_{3,3}$ έχει 9 ακμές.
   iii. Ψευδής. Η βαρύτερη ακμή μπορεί να είναι γέφυρα οπότε ανήκει σε κάθε ελάχιστο συνδετικό δένδρο.

iv. Αληθής. Κάθε κορυφή του C_{17} ενώνεται με άλλες 2 κορυφές του κύκλου και δεν ενώνεται με τις υπόλοιπες 14. Όμως στο συμπληρωματικό αυτή η κορυφή ενώνεται με τις άλλες 14. Άρα κάθε κορυφή του συμπληρωματικού έχει βαθμό 14 και άρα υπάρχει κύκλος Euler.

v. Ψευδής. Ένα τέτοιο γράφημα είναι μόνο ο κύκλος με n κορυφές ο οποίος έχει βέβαια κύκλο Euler.

3. (10 μον.) Ένα γράφημα λέγεται αυτοσυμπληρωματικό αν είναι ισόμορφο με το συμπληρωματικό του. Αν n το πλήθος των κορυφών ενός απλού αυτοσυμπληρωματικού γραφήματος, δείξτε ότι είτε το n είτε το $n-1$ είναι φυσικοί πολλαπλάσιοι του 4.

   Απάντηση. Έστω m το πλήθος των ακμών του αυτοσυμπληρωματικού γραφήματος. Προφανώς m είναι και το πλήθος των ακμών του συμπληρωματικού του και επειδή πάντα το πλήθος των ακμών ενός γραφήματος συν το πλήθος των ακμών του συμπληρωματικού του είναι όσες οι ακμές του K_n, έχουμε ότι $2m = n(n-1)/2$ ή αλλιώς $n(n-1) = 4m$ που σημαίνει ότι το 4 διαιρεί είτε το n είτε το $n-1$.

4. (10 μον.) Έστω φ, χ και ψ προτασιακοί τύποι. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.

   i. Αν $\chi \models \neg(\varphi \wedge \psi)$, τότε $\chi \wedge \neg\varphi \models \neg\psi$

   ii. Αν $\varphi \vdash \chi \vee \psi$, τότε $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$

   iii. Αν $\varphi \vdash \psi$ και $\varphi \vdash \neg\psi$, τότε $\varphi \models \chi$

   iv. Ο τύπος $((\varphi \to \chi) \wedge (\chi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \psi))$ είναι ταυτολογία.

   Απάντηση.

   i. Ψευδής. Αν χ είναι αληθής τότε τουλάχιστον ένας από τους φ, ψ, αλλά όχι αναγκαστικά και οι δύο, είναι ψευδής. Άρα αν ο χ είναι αληθής και ο φ ψευδής, τότε θα πρέπει και ο ψ να είναι ψευδής, που δεν συμβαίνει πάντα.

   ii. Αληθής. Αν $\varphi \vdash \chi \vee \psi$, τότε ισοδύναμα $\varphi \vdash \neg\chi \to \psi$. Το Θεώρημα Απαγωγής δίνει $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$.

   iii. Αληθής. Η υπόθεση $\varphi \vdash \psi$ και $\varphi \vdash \neg\psi$ σημαίνει ότι ο φ είναι αντίφαση και συνεπώς ο φ συνεπάγεται ταυτολογικά κάθε τύπο.

   iv. Ψευδής. Το αριστερό μέρος της ισοδυναμίας σημαίνει ότι και οι τρεις τύποι είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους και άρα συνεπάγεται το δεξί μέρος, αλλά όχι και το αντίστροφο.

5. (10 μον.) Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα η οποία είναι εφοδιασμένη με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο “$\leq$” και με το διθέσιο συναρτησιακό συμβολο “*”. Στη γλώσσα αυτή θεωρούμε την δομή $\mathcal{N}$ στους φυσικούς αριθμούς και την δομή $\mathcal{R}$ στους πραγματικούς. Και στις δύο δομές το “$\leq$” έχει την συνήθη ερμηνεία και το “*” ερμηνεύεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Δώστε (i) ένα τύπο που να ισχύει και στις δύο δομές και (ii) έναν τύπο που να ισχύει στην $\mathcal{R}$ αλλά όχι στην $\mathcal{N}$.

   Απάντηση.

   $(i) \qquad\qquad \forall x \exists y (y \geq x \wedge y \neq x)$

(ii) $\forall x \exists y (y \leq x \wedge y \neq x)$

Ο πρώτος τύπος λέει ότι κάθε στοιχείο έχει κάποιο μεγαλύτερο του, πράγμα που ισχύει και στα δύο σύνολα και ο δεύτερος ότι κάθε στοιχείο έχει κάποιο μικρότερο του, που ισχύει στους πραγματικούς αλλά όχι στους φυσικούς. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε π.χ. να δώσουμε τον τύπο $\exists x(x * x \leq x \wedge x * x \neq x)$ που λέει ότι υπάρχει αριθμός που το τετράγωνο του είναι γνήσια μικρότερο του ίδιου του αριθμού π.χ. το 0,5.

6. (10 μον.) Ένας σταθμός διοδίων έχει 10 διαδρόμους από τους οποίους 3 είναι αυτόματης διέλευσης (ένα αυτοκίνητο για να περάσει από αυτούς πρέπει να έχει τον ειδικό πομποδέκτη). Με πόσους τρόπους μπορούν 20 διαφορετικά αυτοκίνητα από τα οποία τα 6 διαθέτουν τον ειδικό πομποδέκτη, να περάσουν από τον σταθμό αν παίζει ρόλο μόνο ο διάδρομος διέλευσης κάθε αυτοκινήτου και όχι η σειρά διέλευσης και τα 6 αυτοκίνητα με τον πομποδέκτη μπορούν να περάσουν από οποιονδήποτε διάδρομο ενώ τα υπόλοιπα μόνο από διάδρομο χωρίς πομποδέκτη;

   Απάντηση. Κάθε αυτοκίνητο με πομποδέκτη έχει 10 επιλογές διέλευσης και άρα τα 6 που είναι εφοδιασμένα με πομποδέκτη μπορούν να περάσουν με 10^6 τρόπους. Τα 14 αυτοκίνητα χωρίς πομποδέκτη μπορούν να περάσουν αντίστοιχα με 7^{14} τρόπους. Ο κανόνας του γινομένου δίνει το συνολικό πλήθος των διελεύσεων που είναι $10^6 \cdot 7^{14}$.

7. (15 μον.) Πόσοι είναι οι διαφορετικοί πίνακες αληθείας που μπορούμε να πάρουμε κατασκευάζοντας έναν προτασιακό τύπο με 4 προτασιακές μεταβλητές; Δύο πίνακες διαφέρουν μεταξύ τους αν για κάποια αποτίμηση έχουν διαφορετική αληθοτιμή.

   Απάντηση. Ο πίνακας αληθείας ενός τύπου με 4 προτασιακές μεταβλητές έχει $2^4 = 16$ γραμμές. Ένας πίνακας αληθείας προκύπτει όταν επιλέξουμε τις γραμμές του όπου η τιμή αληθείας είναι Α. Υπάρχουν 2^{16} τέτοιες επιλογές όσα και υποσύνολα ενός 16-μελους συνόλου.

8. (10 μον.) Πόσες είναι οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$ αν πρέπει $x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$ και $2 \geq x_5 \geq 0$;

   Απάντηση. Εφόσον θέλουμε $x_5 \leq 2$, οι επιτρεπόμενες τιμές για το x_5 είναι 0,1 και 2. Για κάθε περίπτωση από αυτές λοιπόν διαμορφώνεται μια εξίσωση. Για $x_5 = 0$ έχουμε την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ με $\binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10}$ λύσεις. Για $x_5 = 1$ έχουμε την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ με $\binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9}$ λύσεις. Τέλος, για $x_5 = 2$ έχουμε την εξίσωση $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$ με $\binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8}$ λύσεις. Ο κανόνας του αθροίσματος δίνει το συνολικό πλήθος των λύσεων $\binom{13}{10} + \binom{12}{9} + \binom{11}{8}$.

9. (10 μον.) Έχουμε 28 τετράδια, 4 διαφορετικών χρωμάτων, 7 από κάθε χρώμα, τα οποία θέλουμε να μοιράσουμε σε 2 παιδιά έτσι ώστε κάθε ένα να πάρει 14 τετράδια και τουλάχιστον 1 και το πολύ 6 από κάθε χρώμα. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον συντελεστή της που μας δείχνει με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η διανομή.

   Απάντηση. Παρατηρούμε ότι οποιοσδήποτε τρόπος διανομής των τετραδίων στο πρώτο παιδί, δηλαδή 14 τετράδια με τουλάχιστον 1 και το πολύ 6 από κάθε χρώμα δίνει ένα και μοναδικό τρόπο μέσα στις προδιαγραφές για το άλλο παιδί. Άρα αρκεί να μετρήσουμε τους τρόπους διανομής στο ένα παιδί. Η γεννήτρια συνάρτηση έχει 4 απαριθμητές, ένα για κάθε χρώμα που είναι $(x + x^2 + \cdots + x^6)$. Άρα η συνολική γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$(x + x^2 + \cdots + x^6)^4$$

και σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{14}.

10. (10 μον.) Αν x *πραγματικός* και k, r ακέραιοι τέτοιοι ώστε $k \geq r \geq 0$ δείξτε την σχέση $\binom{x}{k}\binom{k}{r} = \binom{x}{r}\binom{x-r}{k-r}$.

    Απάντηση.

    Εφαρμόζουμε τον ορισμό του γενικευμένου διωνυμικού συντελεστή αρχίζοντας από το 2ο μέλος.

$$
\begin{aligned}
&\binom{x}{r}\binom{x-r}{k-r} = \\
&\frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!} \cdot \frac{(x-r)(x-r-1)\cdots(x-k+1)}{(k-r)!} = \\
&\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{r!(k-r)!} = \\
&\frac{k!x(x-1)\cdots(x-k+1)}{r!k!(k-r)!} = \binom{x}{k}\binom{k}{r}
\end{aligned}
$$