Α

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2015
Απαντήσεις

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Μ. Μπουντουρίδης, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.

   i. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών (6,4,3,2,1,1,0).

   ii. Αν ένα γράφημα έχει σημείο κοπής, τότε δεν έχει κύκλο Euler.

   iii. Υπάρχει απλό γράφημα με 2014 κορυφές που τόσο αυτό όσο και το συμπληρωματικό του έχουν κύκλο Euler.

   iv. Υπάρχει απλό επίπεδο γράφημα με 6 κορυφές και 14 ακμές.

   v. Αν ένα γράφημα έχει χρωματικό αριθμό ίσο με k, κάθε υπογράφημά του έχει χρωματικό αριθμό ίσο με k.

   Απάντηση.

   i. Ψευδής. Υπάρχει στο γράφημα μια απομονωμένη κορυφή με βαθμό 0, οπότε δεν μπορεί μια κορυφή να έχει 6 γειτονικές όπως ζητείται.

   ii. Ψευδής. Θεωρείστε π.χ. δύο τρίγωνα που έχουν μια κοινή κορυφή.

   iii. Ψευδής. Για να σθμβαίνει αυτό πρέπει κάθε κορυφή να έχει άρτιο βαθμό και στο δοθέν γράφημα και στο συμπλρωματικό του. Ο βαθμός όμως μιας κορυφής στο γράφημα συν τον βαθμό της ίδιας κορυφής στο συμπληρωματικό του πρέπει προφανώς να ισούται με $n-1$ (n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος). Στην περίπτωση μας λοιπόν με 2013. Αυτό όμως σημαίνει ότι η κορυφή αυτή έχει περιττό βαθμό σε ένα από τα δύο γραφήματα, άρα αυτό δεν έχει κύκλο Euler.

   iv. Ψευδής. Αν n και m το πλήθος των κορυφών και των ακμών ενός επίπεδου γραφήματος, τότε ισχύει $m \leq 3n-6$. Στην περίπτωση μας θα πρέπει λοιπόν να ισχύει $14 \leq 3 \cdot 6 - 6$ ή αλλιώς $14 \leq 12$, άτοπο.

   v. Ψευδής. Π.χ. μια κορυφή ενός γραφήματος είναι ένα τετριμμένο υπογράφημα του με χρωματικό αριθμό 1.

2. (10 μον) Έστω ότι έχετε γράψει σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού μία συνάρτηση που υπολογίζει την k-οστη δύναμη (το k είναι παράμετρος εισόδου) ενός αυθαίρετου πίνακα $n \times n$. Περιγράψτε πως θα χρησιμοποιούσατε αυτή τη συνάρτηση σε ένα πρόγραμμα που διαβάζει τον πίνακα γειτνίασης ενός γραφήματος, δύο κορυφές του u και v και υπολογίζει το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού μεταξύ u και v.

   Απάντηση. Η k-οστη δύναμη του πίνακα γειτνίασης A ενός γραφήματος έχει ως γνωστόν στην θέση ij το πλήθος των διαδρομών μήκους ακριβώς k από την κορυφή i στην

j. Βρίσκουμε λοιπόν *διαδοχικά* με την βοήθεια του υποπρογράμματος τις δυνάμεις A^k για $k = 1, 2, 3, \ldots$ μέχρι το πολύ $k = n - 1$. Αν για μία τιμή του k, έστω ℓ είναι $\alpha_{ij}^{(\ell)} = 0$ και για την αμέσως επόμενη της είναι $\alpha_{ij}^{(\ell+1)} \neq 0$ τότε το συντομότερο $i - j$ μονοπάτι έχει μήκος $\ell + 1$ μια και δεν υπάρχει διαδρομή με μήκος ℓ ή μικρότερο αλλά υπάρχει με μήκος $\ell + 1$. Αυτή η τελευταία διαδρομή είναι αναγκαστικά μονοπάτι.

3. (10 μον.) Δείξτε ότι υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε $n(n–3)/2$ ακμές από το $K_n(n{\geq}3)$, ώστε το γράφημα που προκύπτει να έχει κύκλο Hamilton.

   Απάντηση. Το K_n έχει $n(n-1)/2$ ακμές. Παρατηρούμε ότι $n(n-1)/2 - n(n-3)/2 = n$. Αυτό σημαίνει ότι οι ακμές που δεν ανήκουν σε οποιονδήποτε κύκλο Hamilton του K_n είναι ακριβώς όσες μας ζητείται να αφαιρέσουμε. Συνεπώς αφαιρώντας τες απομένει ένας κύκλος μήκους n, δηλαδή ένας κύκλος Hamilton.

4. (10 μον.) Έστω φ, χ και ψ προτασιακοί τύποι. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε.

   i. Αν $\chi \models \varphi \wedge \psi$, τότε $\chi \wedge \neg\varphi \models \neg\psi$
   ii. Αν $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$, τότε $\varphi \vdash \chi \vee \psi$
   iii. Αν $\varphi \to \chi$ και $\chi \to \psi$ και $\psi \to \varphi$, τότε οι τρεις τύποι φ, χ, ψ είναι ισοδύναμοι.
   iv. Το ΑΣ1 (Αξιωματικό Σχήμα 1) αποδεικνύεται τυπικά από τα άλλα δύο Αξιωματικά Σχήματα.

   Απάντηση.

   i. Αληθής. Αν όταν ο χ είναι αληθής, τότε και ο φ και ο ψ είναι επίσης, τότε ο $\chi \wedge \neg\varphi$ είναι πάντα ψευδής και άρα συνεπάγεται ταυτολογικά οποιονδήποτε τύπο.
   ii. Αληθής. Αν $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$, τότε από το Θεώρημα Απαγωγής $\varphi \vdash \neg\chi \to \psi$ ή ισοδύναμα $\varphi \vdash \chi \vee \psi$.
   iii. Αληθής. Αν οποιοσδήποτε τύπος είναι αληθής τότε τότε λόγω των δύο άλλων συνεπαγωγών και οι άλλοι δύο είναι αληθείς επίσης. Άρα ή και τρεις είναι αληθείς ή και οι τρεις ψευδείς.
   iv. Ψευδής. Κάθε Αξιωματικό Σχήμα είναι ανεξάρτητο από τα άλλα δύο.

5. (10 μον.) Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα η οποία είναι εφοδιασμένη με το διμελές κατηγορηματικό σύμβολο "$\leq$" και με το διθέσιο συναρτησιακό συμβολο "*". Στη γλώσσα αυτή θεωρούμε την δομή $\mathcal{N}$ στους φυσικούς αριθμούς και την δομή $\mathcal{R}$ στους πραγματικούς. Και στις δύο δομές το "$\leq$" έχει την συνήθη ερμηνεία και το "*" ερμηνεύεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού. Δώστε (i) ένα τύπο που να μην ισχύει σε καμία από τις δύο δομές και (ii) έναν τύπο που να ισχύει στην $\mathcal{N}$ αλλά όχι στην $\mathcal{R}$.

   Απάντηση.

   (i) $\quad \forall x \exists y (x \approx y * y)$

   (ii) $\quad \exists x \forall y (x \neq y \to x \leq y)$

   Ο τύπος (i) λέει ότι κάθε στοιχείο του συνόλου έχει τετραγωνική ρίζα πράγμα που δεν ισχύει ούτε στους πραγματικούς ούτε στους φυσικούς και ο (ii) ότι υπάρχει ένα ελάχιστο στοιχείο πράγμα που ισχύει στους φυσικούς αλλά όχι στους πραγματικούς.

6. (15 μον.) Πόσες είναι οι διμελείς ανακλαστικές σχέσεις στο σύνολο $A = \{x, y, z, w\}$ που δεν περιλαμβάνουν κανένα ζεύγος με πρώτο στοιχείο το x εκτός του (x, x);

   Απάντηση. Εφόσον το σύνολο είναι 4-μελες, υπάρχουν $4^2 = 16$ δυνατά ζεύγη που μπορούν να οριστούν με τα στοιχεία του. Οποιαδήποτε επιλογή από αυτά συνιστά μια διμελή σχέση στο A. Επειδή όμως θέλουμε μόνο ανακλαστικές σχέσεις θα πρέπει να περιλάβουμε στην επιλογή μας οπωσδήποτε τα ζεύγη $(x, x), (y, y), (z, z), (w, w)$. Μας ζητείται επίσης να μην περιλάβουμε στην διμελή σχέση τα ζεύγη $(x, y), (x, z), (x, w)$. Δηλαδή για 7 από τα 16 ζεύγη είναι προσδιορισμένο αν θα περιληφθούν ή όχι στην διμελή σχέση και απομένουν 9 τα οποία μπορούν ελεύθερα να περιληφθούν ή όχι. Οι δυνατότητες είναι λοιπόν όσες και τα υποσύνολα ενός 9-μελους συνόλου δηλαδή 2^9.

7. (10 μον.) Πόσες είναι οι ακέραιες και μη αρνητικές λύσεις της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$ αν πρέπει κάθε $x_i, i = 1, \dots, 5$ να είναι πολλαπλάσιο του 3;

   Απάντηση. Εφόσον ζητάμε κάθε x_i να είναι πολλαπλάσιο του 3, έχουμε ότι $x_i = 3y_i, i = 1, \dots, 5$ για κάποιες ακέραιες και μη αρνητικές μεταβλητές $y_i, i = 1, \dots, 5$. Η εξίσωση γίνεται λοιπόν $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$ και σε αυτή ζητάμε το πλήθος των ακέραιων και μη αρνητικών λύσεων που είναι βέβαια $\binom{10+5-1}{10} = \binom{14}{10}$.

8. (10 μον.) Μια στρατιωτική φάλαγγα 20 αυτοκινήτων αποτελείται από 6 ίδια τζιπ, 4 ίδια μικρά φορτηγά και 10 ίδια μεγάλα φορτηγά. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η φάλαγγα αν (i) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός (ii) για λόγους ασφαλείας είναι απαραίτητο ακριβώς μπροστά από ένα μικρό φορτηγό να υπάρχει ένα τζιπ.

   Απάντηση. (i) Αν δεν υπάρχει περιορισμός, ζητάμε τις μεταθέσεις 20 αντικειμένων που διαιρούνται σε 3 ομάδες με μη διακεκριμένα αντικείμενα μεταξύ τους και με 6, 4, και 10 μέλη αντίστοιχα. Αυτές είναι $\frac{20!}{6!4!10!}$. (ii) Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ένα τζιπ και ένα μικρό φορτηγό σαν ένα νέο αντικείμενο το οποίο μπορεί να τοποθετηθεί οπουδήποτε μέσα στην φάλαγγα. Μπορούν να γίνουν 4 τέτοια νέα «αντικείμενα». Έχουμε λοιπόν μετάθεση από 2 τζιπ, 10 φορτηγών και 4 «αντικειμένων». Το πλήθος τους είναι ανάλογα με πριν $\frac{16!}{2!10!4!}$.

9. (10 μον.) Αν x *πραγματικός* και k θετικός ακέραιος, δείξτε την σχέση $x\binom{x}{k} = k\binom{x+1}{k+1} + \binom{x}{k+1}$

   Απάντηση. Εφαρμόζουμε τον ορισμό του γενικευμένου διωνυμικού συντελεστή αρχίζοντας από το 2ο μέλος.

$$
k\binom{x+1}{k+1} + \binom{x}{k+1} = k\frac{(x+1)_{(k+1)}}{(k+1)!} + \frac{(x)_{(k+1)}}{(k+1)!} =
$$
$$
\frac{k}{k+1}(x+1)\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} + \frac{1}{k+1}\frac{x(x-1)\cdots(x-k)}{k!} =
$$
$$
\frac{k}{k+1}(x+1)\binom{x}{k} + \frac{x-k}{k+1}\binom{x}{k} = x\binom{x}{k}
$$

10. (10 μον.) Μια τράπουλα έχει 52 χαρτιά όπου κάθε αριθμός (1-10) και κάθε φιγούρα (Βαλές, Ντάμα, Ρήγας) υπάρχει 4 φορές. Επιλέγουμε 20 χαρτιά από την τράπουλα και τα τοποθετούμε σε μία στήλη έτσι ώστε τα χαρτιά να είναι ταξινομημένα σε αύξουσα

σειρά. Π.χ. αν έχουμε επιλέξει κάποια 3-αρια, αυτά προηγούνται από τυχόν επιλεγμένα 4-αρια κλπ. Επίσης θεωρούμε ότι οι 3 φιγούρες είναι «μεγαλύτερες» από τα 10-αρια και έχουν μεταξύ τους σειρά (Βαλές, Ντάμα, Ρήγας). Δεν έχει σημασία η σχετική σειρά ανάμεσα σε χαρτιά με ίδιο νούμερο ή ίδια φιγούρα. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον συντελεστή της που δείχνει με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό.

Απάντηση. Η βασική παρατήρηση εδώ είναι ότι αν έχουμε μια συγκεκριμένη επιλογή 20 χαρτιών, η τοποθέτηση τους σε μια στήλη είναι *μοναδική*, μια και τα χαρτιά είναι μεταξύ τους ταξινομημένα. Άρα στην πραγματικότητα ζητάμε τρόπους *επιλογής* (μόνο, όχι και διάταξη τους) 20 χαρτιών από ένα σύνολο όπου έχουμε 13 4-αδες διαφορετικών χαρτιών και από κάθε 4-αδα μπορούμε να πάρουμε από 0 έως και τα 4 χαρτιά που περιλαμβάνει. Χρησιμοποιούμε συνεπώς συνήθη γεννήτρια όπου ο απαριθμητής κάθε 4-αδας είναι $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$. Η γεννήτρια συνεπώς είναι η

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{13}$$

και σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{20}.