Ονοματεπώνυμο:..
Τμήμα:....................Διδάσκων:..

(Οι εκφωνήσεις επιστρέφονται μαζί με το γραπτό)

Α

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιουλίου 2015

Διδάσκοντες: Δ. Καββαδίας, Μ. Μπουντουρίδης, Π. Αλεβίζος

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. Καμία απάντηση δεν θα ληφθεί υπόψη χωρίς δικαιολόγηση.

   i. Υπάρχει απλό γράφημα με ακολουθία βαθμών 3,3,3,1,0,0

   ii. Έστω G γράφημα που έχει και κύκλο Euler και κύκλο Hamilton και κάθε κορυφή του έχει βαθμό μεγαλύτερο του 2. Αν στο G αφαιρέσουμε τις ακμές του κύκλου Hamilton και το γράφημα που απομένει είναι συνεκτικό, τότε συνεχίζει να έχει κύκλο Euler.

   iii. Έστω G γράφημα με 13 κορυφές και χρωματικό αριθμό 3. Τότε στο G υπάρχει σύνολο κορυφών που ανά δύο δεν συνδέονται (δηλαδή σύνολο ανεξαρτησίας) μεγέθους τουλάχιστον 5.

   iv. Υπάρχει επίπεδο συνεκτικό γράφημα με 7 κορυφές, 7 ακμές και 3 όψεις.

   v. Αν T δένδρο με μέγιστο βαθμό Δ τότε το T έχει τουλάχιστον Δ φύλλα.

   Απάντηση

   i. Ψευδής. Αν υπήρχε, θα είχε 6 κορυφές από τις οποίες 2 απομονωμένες. Η κορυφή βαθμού 1 θα συνδεόταν με μια από τις κορυφές βαθμού 3, οπότε στην ουσία ζητάμε γράφημα 3 κορυφών με βαθμούς 3,3, 2 που προφανώς δεν υπάρχει.

   ii. Αληθής. Κατ' αρχήν το γράφημα που απομένει είναι συνεκτικό. Επίσης οι βαθμοί των κορυφών του είναι όλοι άρτιοι μια και κάθε μία έχει άρτιο βαθμό και της αφαιρούμε 2 ακμές. Άρα έχει κύκλο Euler.

   iii. Αληθής. Υπάρχουν 3 σύνολα ανεξαρτησίας (χρωματικές ομάδες) στις 13 κορυφές, άρα το μέσο μέγεθος τους είναι 13/3=4,3....Επομένως υπάρχει κάποιο με μέγεθος τουλάχιστον 5.

   iv. Ψευδής. Αν υπήρχε θα έπρεπε να πληροί τον τύπο του Euler, δηλαδή 7+3=7+2, που δεν ισχύει.

   v. Αληθής. Μια κορυφή βαθμού Δ έχει Δ γείτονες από τους οποίους αρχίζουν μονοπάτια που αναγκαστικά τελειώνουν σε φύλλα.

2. (10 μον) Έστω γράφημα G με τον παρακάτω πίνακα γειτνίασης. Σχεδιάστε το G. Ποιός ο χρωματικός αριθμός του;

$$A_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Απάντηση. Πρόκειται για διμερές γράφημα. Το πάνω δεξιά τμήμα του πίνακα διάστασης 4×3 (και το ανάστροφο κάτω αριστερά) προσδιορίζει τα δύο μέρη. Στο πρώτο μετέχουν οι κορυφές v_1, v_2, v_3, v_4 και στο δεύτερο οι κορυφές v_5, v_6, v_7. Άρα ο χρωματικός του αριθμός είναι 2.

3. (10 μον.) Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός ακμών που αν προστεθούν στο P_6 (το μονοπάτι με 6 κορυφές) δίνουν μη επίπεδο γράφημα;

Απάντηση. Για να προκύψει μη επίπεδο γράφημα, θα πρέπει να προκύψει είτε το K_5 (που έχει 10 ακμές) είτε το $K_{3,3}$ (που έχει 9 ακμές). Το πρώτο απαιτεί την προσθήκη στο P_6 6 ακμών, το δεύτερο 4.

4. (10 μον.) Έστω φ και ψ προτασιακοί τύποι. Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθείς; Αιτιολογήστε. (*Συμβουλή:* Για λόγους χρόνου είναι καλύτερα να μην κάνετε αληθοπίνακα)

   i. $\models \varphi \to ((\psi \to \neg\varphi) \to \varphi)$
   ii. $\psi \models \neg\psi \to \neg\varphi$
   iii. $\neg\varphi \models \neg\psi \to \neg\varphi$
   iv. $\varphi \to \varphi \models \varphi \to \psi$

Απάντηση.

   i. Αληθής. Ζητάμε αν ο τύπος είναι ταυτολογία. Για να μην είναι, πρέπει ο φ να είναι αληθής και το συμπέρασμα της συνεπαγωγής ψευδές. Όμως επειδή στο συμπέρασμα της εσωτερικής συνεπαγωγής είναι πάλι ο φ, συνάγουμε ότι ο τύπος δεν διαψεύδεται ποτέ.
   ii. Αληθής. Όταν ψ αληθές, η υπόθεση της συνεπαγωγής στα δεξιά είναι ψευδής, άρα η συνεπαγωγή είναι αληθής και αυτή.
   iii. Αληθής. Όταν ο $\neg\varphi$ αριστερά είναι αληθής, είναι επίσης αληθές και το συμπέρασμα της συνεπαγωγής στα δεξιά. Άρα και ο τύπος στα δεξιά είναι αληθής.
   iv. Ψευδής. Ο τύπος αριστερά είναι ταυτολογία ενώ ο δεξιά δεν είναι.

5. (10 μον.) Στην πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με ένα κατηγορηματικό σύμβολο G με ερμηνεία $G(x, y)$: «οι κορυφές x και

y συνδέονται με ακμή», γράψτε τύπο $\varphi(x)$ που να δηλώνει: « Η κορυφή x έχει βαθμό 2». Στη συνέχεια και χρησιμοποιώντας προαιρετικά τον $\varphi(x)$, γράψτε τύπο ψ που να δηλώνει «Υπάρχει μονοπάτι μήκους 2 του οποίου όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2».

Απάντηση.

$$\varphi(x) = \exists y \exists z (y \neq z \wedge G(x,y) \wedge G(x,z) \wedge \forall w (w \neq y \wedge w \neq z \rightarrow \neg G(x,w)))$$

και

$$\psi = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge G(x_1,x_2) \wedge G(x_2,x_3) \wedge \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \varphi(x_3))$$

6. (15 μον.) Πόσες είναι οι συμβολοσειρές μήκους 20 που σχηματίζονται από 4 Α, 7 Β, 5 Γ και 4 Δ που δεν έχουν 4 συνεχόμενα Δ;

   Απάντηση. Από το σύνολο των συμβολοσειρών με αυτά τα γράμματα που είναι $\frac{20!}{4!7!5!4!}$ πρέπει να εξαιρέσουμε αυτές που έχουν 4 συνεχόμενα Δ. Θεωρώντας τα 4 Δ σαν ένα «γράμμα» ζητάμε τις συμβολοσειρές μήκους 17 με 4 Α, 7 Β, 5 Γ και το καινούργιο «γράμμα». Η τελική απάντηση είναι λοιπόν:

   $$\frac{20!}{4!7!5!4!} - \frac{17!}{4!7!5!}$$

7. (10 μον.) Πόσα είναι τα passwords μήκους 15 που μπορούν να σχηματιστούν από τα 26 μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου και τα 10 αριθμητικά ψηφία αν ο μόνος περιορισμός είναι ότι πρέπει να υπάρχουν 10 γράμματα και 5 ψηφία;

   Απάντηση. Αρχικά επιλέγουμε τις 5 θέσεις των αριθμητικών ψηφίων. Αυτό γίνεται με $\binom{15}{5}$ τρόπους. Οι 10 θέσεις των γραμμάτων συμπληρώνονται με 26^{10} τρόπους ενώ οι 5 των ψηφίων με 10^5 τρόπους. Από τον κανόνα του γινομένου τα passwords είναι $26^{10}10^5\binom{15}{5}$.

8. (10 μον.) Έχουμε στη διάθεση μας 5 διαφορετικές μεταξύ τους χάντρες (όχι κόκκινες) καθώς και 20 πανομοιότυπες κόκκινες. Πόσα κολιέ μπορούμε να φτιάξουμε με αυτές τις χάντρες αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην τοποθέτηση τους στο κορδόνι; Θεωρούμε ότι το κολιέ φοριέται με ένα τρόπο, άρα στην πραγματικότητα ρωτάμε με πόσους τρόπους οι χάντρες τοποθετούνται στο κορδόνι από αριστερά στα δεξιά.

   Απάντηση. Οι 5 χάντρες τοποθετούνται πάνω στο κορδόνι με 5! τρόπους. Κάθε μία από αυτές τις τοποθετήσεις δημιουργεί 6 διαστήματα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές χάντρες και πριν την πρώτη και μετά την τελευταία όπου τοποθετούνται οι 20 πανομοιότυπες κόκκινες χάντρες. Οι τρόποι για αυτό είναι $\binom{20+6-1}{20} = \binom{25}{20}$. Συνολικά λοιπόν οι τρόποι είναι $5!\binom{25}{20} = \frac{25!}{20!}$.

9. (10 μον.) Υπολογίστε τον σταθερό όρο στο ανάπτυγμα του $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12}$.

   Απάντηση. Έχουμε ότι $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{2k} \frac{1}{x^{12-k}} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{3k-12}$. Ο σταθερός όρος προφανώς έχει εκθέτη του x το 0, δηλαδή $3k - 12 = 0$. Αυτό δίνει $k = 4$. Άρα ο σταθερός όρος είναι ο $\binom{12}{4}$.

10. (10 μον.) Με πόσους τρόπους μπορούμε να αγοράσουμε 100 λίτρα λάδι αν στην αποθήκη υπάρχουν 50 δοχεία του 1 λίτρου, 30 των 5 λίτρων και 20 των 10 λίτρων; Δώστε γεννήτρια

συνάρτηση και επισημάνατε τον συντελεστή που δίνει την απάντηση στο ερώτημα. Δεν χρειάζεται να τον υπολογίσετε.

Απάντηση. Προφανώς πρέπει να χρησιμοποιήσουμε συνήθη γεννήτρια συνάρτηση. Ο απαριθμητής για τα δοχεία του 1 λίτρου είναι ο $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{50})$, για τα δοχεία των 5 λίτρων είναι ο $(1+x^5+x^{10}+\cdots+x^{150})$ (το βήμα στους εκθέτες είναι 5 όσο είναι και η χωρητικότητα αυτών των δοχείων) και για τα δοχεία των 10 λίτρων παρόμοια είναι $(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{200})$. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι λοιπόν:

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{50})(1 + x^5 + x^{10} + \cdots + x^{150})(1 + x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{200})$$

στην οποία αναζητούμε τον συντελεστή του x^{100}.