ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Εξετάσεις Ιανουαρίου 2015

Διδάσκων: Δ. Καββαδίας

1. (15 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αποδείξτε τις απαντήσεις σας.

   i. Κάθε υπογράφημα επίπεδου γραφήματος είναι επίπεδο.

   ii. Κάθε υπογράφημα μη επίπεδου γραφήματος είναι μη επίπεδο.

   iii. Ο χρωματικός αριθμός ενός μη συνεκτικού γραφήματος με k συνιστώσες, είναι το άθροισμα των χρωματικών αριθμών των συνεκτικών συνιστωσών του.

   iv. Αν T δένδρο με n κορυφές, τότε ο πίνακας αντιστοιχιών του έχει $n-1$ στήλες.

   v. Αν σε ένα γράφημα G με κύκλο Hamilton *και* κύκλο Euler προσθέσουμε μια ακμή (δηλαδή ενώσουμε δύο κορυφές που στο G δεν ενώνονταν) τότε το προκύπτον γράφημα δεν έχει κύκλο Euler *ούτε* κύκλο Hamilton.

   Απάντηση.

   i. Αληθής. Αν υπάρχει επίπεδη αποτύπωση όλου του γραφήματος, τότε προφανώς υπάρχει και οποιουδήποτε υπογραφήματος του.

   ii. Ψευδής. Ένα τετριμμένο υπογράφημα κάθε γραφήματος είναι μία κορυφή του. Προφανώς είναι επίπεδο.

   iii. Ψευδής. Ο χρωματικός αριθμός είναι το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που απαιτούνται ώστε το γράφημα να χρωματιστεί «νόμιμα». Αν όμως το γράφημα είναι μη συνεκτικό μπορούμε χωρίς πρόβλημα να χρησιμοποιήσουμε σε μία συνιστώσα χρώματα που χρησιμοποιήθηκαν και σε άλλες. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι ο χρωματικός αριθμός του γραφήματος είναι ο μέγιστος χρωματικός αριθμός μεταξύ όλων των συνιστωσών.

   iv. Αληθής. Ο πίνακας αντιστοιχιών κάθε γραφήματος έχει τόσες στήλες όσες και οι ακμές του. Σε ένα δένδρο όμως με n κορυφές υπάρχουν $n-1$ ακμές.

   v. Ψευδής. Η πρόσθεση μιας ακμής κάνει το γράφημα να μην έχει κύκλο Euler (επειδή τα άκρα της καινούργιας ακμής έχουν πλέον περιττό βαθμό), αλλά δεν επηρεάζει το ότι το γράφημα συνεχίζει να έχει κύκλο Hamilton.

2. (5 μον) Δείξτε ότι ένα διμερές γράφημα με κύκλο Euler έχει άρτιο πλήθος ακμών.

   Απάντηση. Αν V_1 και V_2 τα δύο σύνολα κορυφών του διμερούς γραφήματος, τότε το πλήθος των ακμών του είναι $m = \sum_{v \in V_1} \deg(v) = \sum_{v \in V_2} \deg(v)$ όπου $\deg(v)$ ο βαθμός της κορυφής v. Επειδή όμως το γράφημα έχει κύκλο Euler, ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος άρα και τα αθροίσματα είναι άρτιοι αριθμοί και βέβαια το m.

3. (10 μον) Δείξτε ότι ένα ελάχιστο συνδετικό (επικαλύπτον) δένδρο σε ένα γράφημα με βάρη στις ακμές, παραμένει ελάχιστο αν το βάρος κάθε ακμής του γραφήματος ελαττωθεί κατά την ίδια ποσότητα.

Απάντηση. Αν το γράφημα έχει n κορυφές τότε κάθε συνδετικό δένδρο του θα έχει $n-1$ ακμές. Αν συνεπώς ελαττωθούν τα βάρη των ακμών του γραφήματος κατά w, τότε *κάθε* συνδετικό δένδρο (άρα και ένα ελάχιστου βάρους) θα έχει βάρος ελαττωμένο κατά $(n-1)w$. Δηλαδή όλα τα συνδετικά δένδρα έχουν βάρος ελαττωμένο κατά την ίδια ποσότητα και άρα ένα ελάχιστου βάρους είναι επίσης ελάχιστου βάρους και μετά την μείωση των βαρών.

4. (10 μον.) Δείξτε ότι κάθε γράφημα με n κορυφές και τουλάχιστον n ακμές περιλαμβάνει κύκλο.

   Απάντηση. Αν το γράφημα είναι συνεκτικό, το ζητούμενο είναι τετριμμένο μια και το μέγιστο ακυκλικό συνεκτικό γράφημα είναι ένα δένδρο που έχει $n-1$ ακμές. Οποιαδήποτε ακμή επιπλέον, εισάγει κύκλο. Αν δεν είναι συνεκτικό το γράφημα και έχει, ας πούμε $k(k>1)$ συνιστώσες με πλήθος κορυφών $i_1, i_2, \ldots, i_k$, τότε μια τουλάχιστον θα πρέπει να έχει πλήθος ακμών τουλάχιστον όσες και οι κορυφές της. Αν όχι, και έχουμε για την συνιστώσα j πλήθος ακμών $i_j - 1$, τότε το σύνολο των ακμών του γραφήματος είναι $\sum_{j=1}^{k}(i_j-1) = \sum_{j=1}^{k} i_j - k = n-k$, άτοπο. Για αυτή όμως την συνιστώσα ισχύει ότι είπαμε για την περίπτωση του συνεκτικού γραφήματος.

5. (10 μον.) Θεωρούμε τους προτασιακούς τύπους $\varphi_1 = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_3 \to p_4)$ και $\varphi_2 = p_3 \to (p_1 \to p_3)$. Βρείτε μια αποτίμηση που ικανοποιεί και τους δύο τύπους. Δείξτε χωρίς χρήση αληθοπίνακα ότι ο φ_1 συνεπάγεται ταυτολογικά (λογικά) τον φ_2.

   Απάντηση. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο τύπος φ_2 είναι ταυτολογία μια και αν p_3 ψευδής, ο τύπος φ_2 είναι αληθής (έχει ψευδή υπόθεση) ενώ αν p_3 αληθής ο φ_2 είναι πάλι αληθής (επειδή το συμπέρασμα είναι αληθές). Εναλλακτικά μπορούμε να δούμε ότι ο φ_2 είναι ταυτολογία παρατηρώντας ότι προκύπτει άμεσα από το Αξιωματικό Σχήμα 1. Τώρα ο τύπος φ_1 ικανοποιείται για παράδειγμα με την αποτίμηση $p_1 = p_2 = p_3 =$Αληθής. Για το άλλο ερώτημα, εφόσον ο φ_2 είναι ταυτολογία είναι και λογική συνεπαγωγή κάθε τύπου.

6. (10 μον.) Στην πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα (δηλαδή σε γραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις και παράλληλες ακμές) και είναι εφοδιασμένη με δύο κατηγορηματικά σύμβολα G και A με ερμηνεία αντίστοιχα $G(x,y)$: «οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή», και $A(x)$: «η κορυφή x είναι χρωματισμένη κόκκινη», γράψτε τύπο που να δηλώνει: « Αν στο γράφημα υπάρχει κορυφή που συνδέεται με όλες τις άλλες, τότε αυτή είναι κόκκινη».

   Απάντηση.

$$\forall x(\forall y(x \neq y \wedge G(x,y)) \to A(x))$$

7. (15 μον.) Επιλέγουμε ένα σύνολο V n σημείων στο επίπεδο τα οποία αριθμούμε από το 1 έως το n (άρα είναι διακεκριμένα) και τα οποία θεωρούμε κορυφές ενός γραφήματος G.

   i. Πόσες είναι το πολύ οι ακμές που μπορεί να έχει το G;

   ii. Πόσα διαφορετικά γραφήματα G (συνεκτικά και μη) υπάρχουν με σύνολο κορυφών το V;

   iii. Πόσα διαφορετικά γραφήματα G (συνεκτικά και μη) με m ακμές υπάρχουν και που οι κορυφές τους 1 έως k συνιστούν πλήρες γράφημα (κλίκα) μεγέθους k ($k \leq n$);

Απάντηση.

i. Είναι όσα τα δυνατά ζεύγη κορυφών που υπάρχουν, δηλαδή $N = \binom{n}{2}$.

ii. Κάθε επιλογή οποιουδήποτε συνόλου από τις παραπάνω ακμές δίνει ένα γράφημα. Άρα τα γραφήματα είναι όσα τα υποσύνολα ακμών που μπορεί να έχουμε. Αυτά είναι προφανώς 2^N.

iii. Εφόσον οι κορυφές 1 ώς k πρέπει να συνιστούν κλίκα, θα πρέπει να δαπανήσουμε εκεί $\binom{k}{2}$ ακμές. Αν συνεπώς $m < \binom{k}{2}$, τότε προφανώς δεν μπορούμε να έχουμε κανένα γράφημα με αυτά τα χαρακτηριστικά. Αλλιώς τοποθετούμε στην κλίκα των k πρώτων κορυφών τις $\binom{k}{2}$ ακμές και μας μένουν $m - \binom{k}{2}$ για να τις διανείμουμε στα υπόλοιπα ζευγάρια κορυφών. Αυτά είναι τώρα $N - \binom{k}{2}$. Οποιαδήποτε τέτοια επιλογή δίνει ένα γράφημα με τα χαρακτηριστικά που θέλουμε, άρα τα γραφήματα είναι $\binom{N-\binom{k}{2}}{m-\binom{k}{2}}$.

8. (10 μον.) Στις ερχόμενες εκλογές, σε μια εκλογική περιφέρεια εκλέγονται 12 βουλευτές. Έστω ότι n ψηφοφόροι θα ψηφίσουν το κόμμα Χ και μπορούν να σταυρώσουν 1 ή κανένα υποψήφιο βουλευτή του κόμματος Χ. Με πόσους τρόπους μπορούν να ψηφιστούν οι 12 βουλευτές του κόμματος Χ;

   Απάντηση. Θεωρούμε έναν 13ο «βουλευτή», ο οποίος παίρνει τα ψηφοδέλτια που δεν έχουν σταυρό επάνω. Το πρόβλημα είναι λοιπόν ίδιο με το να διανείμουμε n μη διακεκριμένες σφαίρες (τα ψηφοδέλτια) σε 13 διακεκριμένες υποδοχές (τους 12+1 βουλευτές). Οι τρόποι διανομής είναι $\binom{n+13-1}{n} = \binom{n+12}{n}$.

9. (10 μον.) Αποδείξτε με επαγωγή στο n την παρακάτω σχέση. Έχετε επιπλέον βαθμό αν εκτός από την επαγωγική απόδειξη, δείξετε την σχέση με συνδυαστικά (όχι αλγεβρικά) επιχειρήματα. Σε αυτή την προσέγγιση εξετάστε τι σημαίνει ο κάθε διωνυμικός συντελεστής.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

   Απάντηση. *Με επαγωγή.* Η βάση της επαγωγής για $n = 0$ δίνει τον τύπο $\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0}$ που ισχύει γιατί και τα δύο μέλη της ισότητας είναι 1. Έστω ότι η δοθείσα σχέση ισχύει για $n-1$, $(n \geq 1)$ δηλαδή ότι $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n}{n-1}$. Τότε έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k}{k} + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{n-1} + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}$$

   Η τελευταία ισότητα είναι η εφαρμογή της τριγωνικής ιδιότητας του Pascal.

   Με συνδυαστική. Ένας διωνυμικός συντελεστής της μορφής $\binom{m+k}{k}$ δείχνει τον αριθμό των τρόπων διανομής k μη διακεκριμένων σφαιρών, σε $m+1$ διακεκριμένες υποδοχές. Το άθροισμα λοιπόν είναι το άθροισμα των τρόπων διανομής 0 σφαιρών σε $m+1$ υποδοχές συν τους τρόπους διανομής 1 σφαίρας σε $m+1$ υποδοχές, 2 σφαιρών σε $m+1$ υποδοχές, 3, 4 κλπ., πάντα σε $m+1$ υποδοχές. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι έχουμε πάντα n σφαίρες και ότι σε κάθε προσθετέο τοποθετούμε τις σφαίρες που περισσεύουν σε μια ακόμη υποδοχή με αριθμό $m+2$. Για $k = 0$ και οι n σφαίρες πάνε σε αυτή την καινούργια υποδοχή, για $k = 1$, οι $n - 1$, για $k = 2$ οι $n - 2$ κλπ. Όμως τώρα έχουμε τον αριθμό των τρόπων διανομής n σφαιρών σε $m + 2$ διακεκριμένες υποδοχές, δηλαδή το δεύτερο μέλος.

10. (15 μον.) Θέλουμε να γεμίσουμε ένα ράφι βιβλιοθήκης που έχει μήκος 1 μέτρο με βιβλία των οποίων το πάχος (μήκος της ράχης) είναι 10 εκατοστά ή 5 εκατοστά. Να διατυπώσετε γεννήτρια συνάρτηση και να επισημάνετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δείχνει τον αριθμό των τρόπων να γεμίσει το ράφι, αν δεν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης των βιβλίων, τα βιβλία κάθε μεγέθους θεωρούνται μη διακεκριμένα, και πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα βιβλίο κάθε μεγέθους στο ράφι. Να υπολογίσετε τον συγκεκριμένο συντελεστή.

Απάντηση. Εφόσον τα βιβλία είναι μη διακεκριμένα και δεν έχει σημασία η σειρά τοποθέτησης, θα χρησιμοποιήσουμε συνήθη γεννήτρια συνάρτηση. Ο απαριθμητής για τα βιβλία των 10 εκατοστών θα πρέπει να έχει βήμα 10 και παρόμοια για των 5 εκατοστών, βήμα 5. Η γεννήτρια είναι συνεπώς:

$$(x^{10} + x^{20} + \cdots + x^{90})(x^5 + x^{10} + \cdots + x^{90})$$

στην οποία ζητάμε τον συντελεστή του x^{100}.
Παρατηρούμε ότι για να σχηματιστεί εκθέτης 100 θα πρέπει να συμμετέχουν από τον δεύτερο παράγοντα μόνο δυνάμεις που είναι πολλαπλάσια του 10 (10, 20,..., 90). Αυτές είναι 9 και κάθε μία μπορεί να δώσει την δύναμη x^{100} πολλαπλασιαζόμενη με την κατάλληλη δύναμη από τον πρώτο παράγοντα. Άρα ο ζητούμενος συντελεστής είναι 9.