ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Εξετάσεις Ιουλίου 2014
Διδάσκοντες: Χ. Ζαγούρας, Δ. Καββαδίας

Σημείωση: Τα αναφερόμενα γραφήματα βρίσκονται στο τέλος των εκφωνήσεων

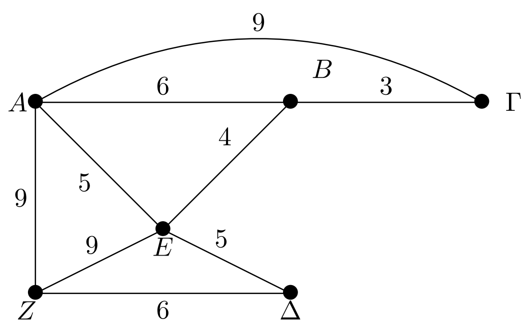
1. Να βρεθεί ένα ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο του γραφήματος G_1.

Απάντηση

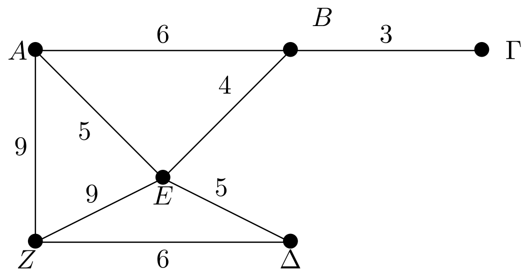
Για το γράφημα G_1 έχουμε πλήθος κορυφών $\nu = 6$ και πλήθος ακμών $\mu = 10$. Ο Αλγόριθμος Αντίστροφης Διαγραφής εφαρμόζεται και θα σταματήσει μόλις παραμείνουν 5 ακμές στο γράφημα.

Ακμή	Μήκος
$A\Delta$	11
$A\Gamma$	9
AZ	9
ZE	9
AB	6
$Z\Delta$	6
AE	5
$E\Delta$	5
BE	4
$B\Gamma$	3

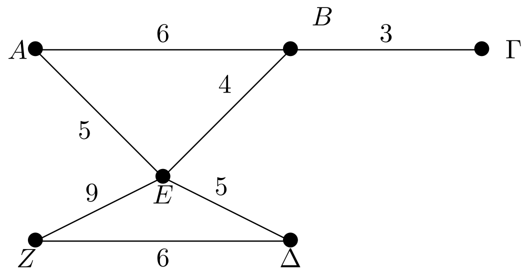
Η διαγραφή της ακμής $A\Delta$ δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος, επομένως μπορεί να διαγραφεί. Προκύπτει επομένως το ακόλουθο γράφημα με 9 ακμές:



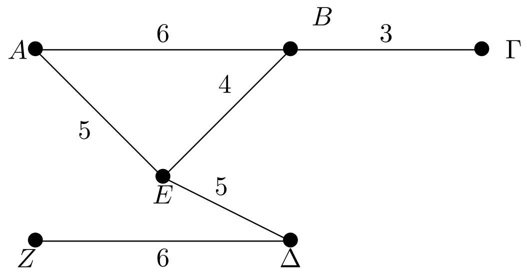
Συνεχίζουμε εξετάζοντας την ακμή $A\Gamma$. Η διαγραφή της ακμής $A\Gamma$ δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος, επομένως μπορεί να διαγραφεί. Προκύπτει τώρα το ακόλουθο γράφημα με 8 ακμές:



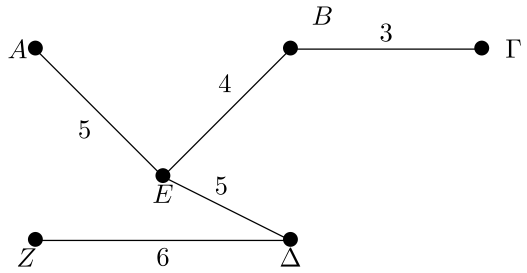
Συνεχίζουμε εξετάζοντας την ακμή AZ. Η διαγραφή της ακμής AZ δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος, επομένως μπορεί να διαγραφεί. Προκύπτει τώρα το ακόλουθο γράφημα με 7 ακμές:



Εξετάζουμε τώρα την ακμή ZE, η οποία μπορεί επίσης να διαγραφεί. Προκύπτει τώρα το ακόλουθο γράφημα με 6 ακμές:



Συνεχίζουμε εξετάζοντας την ακμή AB, η διαγραφή της οποίας δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος. Προκύπτει τώρα το ακόλουθο γράφημα με 5 ακμές:

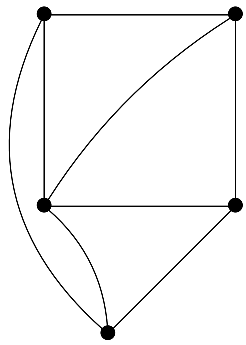


Ο αλγόριθμος σταματά, και το τελικό γράφημα που προέκυψε είναι ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο του γραφήματος G_1 με συνολικό μήκος 23.

2. Για το γράφημα G_2 εξετάστε αν (α) είναι επίπεδο, (β) είναι διμερές και (γ) βρείτε τον χρωματικό αριθμό του.

Απάντηση

(α) το γράφημα είναι επίπεδο, και μια επίπεδη αναπαράστασή του είναι



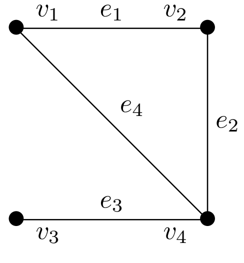
G_2

(β)-(γ) Το γράφημα έχει χρωματικό αριθμό 3, επομένως δεν είναι διμερές.

3. Να βρεθούν οι πίνακες γειτνίασης, αντιστοιχιών, διασυνδέσεων και βαθμών για το γράφημα G_3.

Απάντηση

Θεωρούμε μια διάταξη των κορυφών και των ακμών του G_3:



G_3

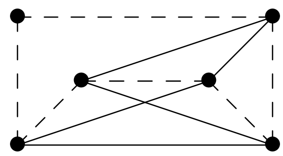
Ο πίνακας γειτνίασης είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας αντιστοιχιών είναι $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας διασυνδέσεων είναι $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας βαθμών είναι $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Δίνεται το γράφημα G_4. (α) Είναι γράφημα-Euler; (β) Είναι γράφημα-Hamilton; Αιτιολογήστε.

   Απάντηση

   (α) Κάθε κορυφή του γραφήματος έχει άρτιο βαθμό, επομένως είναι γράφημα-Euler.

   (β) Υπάρχει κύκλος (διακεκομμένες ακμές) που περιέχει όλες τις κορυφές, επομένως είναι γράφημα-Hamilton



G_4

5. Έστω p_1 και p_2 προτασιακές μεταβλητές. Εξετάστε αν οι παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές. Αιτιολογήστε την απάντηση σας.

   i. Ο προτασιακός τύπος $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)$ είναι ταυτολογία.
   ii. Ο προτασιακός τύπος $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \wedge \neg p_1)$ είναι αντίφαση.
   iii. $p_1 \wedge \neg p_1 \models p_2 \wedge \neg p_2$
   iv. $(p_1 \wedge \neg p_1) \to p_2 \models p_2$

   Απάντηση

   i. Αναζητούμε αποτίμηση που διαψεύδει τον τύπο. Θα πρέπει λοιπόν η υπόθεση $p_1 \to p_2$ να είναι αληθής και το συμπέρασμα $\neg p_2 \to \neg p_1$ να είναι ψευδές. Για να συμβαίνει το τελευταίο πρέπει p_2 να είναι ψευδής και p_1 αληθής. Όμως αυτή η αποτίμηση διαψεύδει και την υπόθεση και άρα η συνεπαγωγή είναι αληθής. Άρα δεν υπάρχει αποτίμηση που διαψεύδει τον τύπο, άρα είναι ταυτολογία.

ii. Πρέπει κάθε αποτίμηση να διαψεύδει τον τύπο. Άρα πρέπει $p_1 \to p_2$ να είναι αληθής και $\neg p_2 \wedge \neg p_1$ να είναι ψευδής. Όμως αν p_1 και p_2 ψευδή, το συμπέρασμα είναι αληθές και άρα και όλος ο τύπος. Άρα δεν είναι αντίφαση.

iii. Ο αριστερά τύπος είναι αντίφαση άρα συνεπάγεται ταυτολογικά οποιονδήποτε τύπο. Η δήλωση ισχύει.

iv. Ο αριστερά τύπος είναι ταυτολογία μια και η υπόθεση της συνεπαγωγής είναι αντίφαση. Όμως ο δεξιά μπορεί να διαψευστεί όταν p_2 ψευδής.Άρα η δήλωση δεν ισχύει.

6. Στην πρωτοβάθμια γλώσσα που ορίζεται σε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα και είναι εφοδιασμένη με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο G με «ερμηνεία " $G(x, y)$: οι κορυφές x και y συνδέονται με ακμή", γράψτε τύπο $\varphi(x, y)$ που να δηλώνει "Αν η κορυφή x είναι απομονωμένη, τότε και η κορυφή y είναι απομονωμένη" (απομονωμένη σημαίνει ότι δεν συνδέεται με καμιά άλλη).

Απάντηση

$$\varphi(x, y) = \forall u \neg G(x, u) \to \forall u \neg G(y, u)$$

7. 30 πρόσκοποι (που θεωρούνται διακεκριμένοι) πρόκειται να κατασκηνώσουν. Με πόσους τρόπους μπορούν να τακτοποιηθούν στις σκηνές αν:

i. έχουν διαθέσιμες 5 αριθμημένες (διακεκριμένες) σκηνές των 6 ατόμων;

ii. έχουν διαθέσιμες 5 πανομοιότυπες (μη διακεκριμένες) σκηνές των 6 ατόμων;

iii. έχουν διαθέσιμες 1 σκηνή των 10 ατόμων, 1 σκηνή των 8, 1 σκηνή των 7 και 1 σκηνή των 5 ατόμων;

iv. έχουν διαθέσιμες 3 μεγάλες διακεκριμένες σκηνές των 25 ατόμων και στην 1η θα μπουν 10 ή περισσότεροι, στην 2η από 15 έως 20 και στην 3η άρτιος αριθμός; Για το υπο-ερώτημα αυτό οι πρόσκοποι θεωρούνται μη διακεκριμένοι (άρα έχει σημασία μόνο ο αριθμός τους σε κάθε σκηνή) και ζητείται να δώσετε γεννήτρια συνάρτηση και να υποδείξετε τον συντελεστή της δύναμης του x για τον αριθμό των τρόπων που μπορούν να τακτοποιηθούν στις σκηνές. Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε τον συντελεστή.

Απάντηση

i. Πρόκειται για μεταθέσεις 30 αντικειμένων (οι πρόσκοποι) τα οποία χωρίζονται σε ομάδες μη διακεκριμένων αντικειμένων μέσα στην ομάδα (οι πρόσκοποι κάθε σκηνής). Αλλιώς: αν έχουμε από 6 'εισητήρια' με τους αριθμούς 1,2,3,4,5, η τοποθέτηση κάθε πρόσκοπου γίνεται ανάλογα με το εισητήριο που θα του τύχει, στην αντίστοιχη σκηνή. Ο αριθμός των τοποθετήσεων είναι όσες οι συμβολοσειρές με τα σύμβολα 1,2,3,4,5 όπου κάθε ένα χρησιμοποιείται 6 φορές. Ο αριθμός είναι λοιπόν $\frac{30!}{6!^5}$.

ii. Τώρα οι σκηνές είναι μη διακεκριμένες και άρα οι τρόποι είναι όσοι οι παραπάνω διαιρεμένοι με το 5! ώστε να φύγει η διάταξη από τις σκηνές. Δηλαδή $\frac{30!}{6!^5 5!}$

iii. Οι σκηνές είναι διακεκριμένες λόγω της διαφορετικής χωρητικότητας τους και άρα όπως και στο (i) οι τρόποι είναι $\frac{30!}{10!8!7!5!}$.

iv. Εφόσον τώρα μετράει μόνο ο αριθμός των προσκόπων που βρίσκονται σε κάθε σκηνή, η γεννήτρια θα είναι συνήθης και θα είναι:

$$(x^{10} + x^{11} + \cdots + x^{25})(x^{15} + \cdots + x^{20})(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{24})$$

όπου οι παράγοντες από αριστερά προς τα δεξιά είναι οι απαριθμητές για την 1η, 2η και 3η σκηνή αντίστοιχα. Στο ανάπτυγμα της παράστασης αυτής αναζητούμε τον συντελεστή του x^{30}.

8. Πόσες είναι οι ακέραιες και μη αρνητικές λύσεις της ανίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 100$;

Απάντηση

Η δοθείσα ανίσωση μπορεί να μετατραπεί σε εξίσωση με την εισαγωγή μιας ακόμη μη αρνητικής ακέραιας μεταβλητής s. Ζητούμε λοιπόν τον αριθμό των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + s = 99$ με $x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5$ και $s \geq 0$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οποιαδήποτε 5-αδα μεταβλητών που ικανοποιεί την ανίσωση αντιστοιχεί σε μία και μόνη 6-αδα μεταβλητών που ικανοποιεί την εξίσωση και το αντίστροφο. Επομένως αρκεί να μετρήσουμε τις λύσεις της εξίσωσης που είναι όσοι οι τρόποι διανομής 99 μη διακεκριμένων σφαιρών σε 6 διακεκριμένες υποδοχές. Ο αριθμός αυτός είναι $\binom{99+6-1}{99} = \binom{104}{99}$.

9. (i) Για την παρακάτω $n \times n$ ορίζουσα D_n γράψτε μία αναδρομική σχέση (θα είναι αναδρομική 2ης τάξης) που συνδέει την τιμή της με τις τιμές οριζουσών μικρότερης τάξης.

$$D_n = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(ii) Υπολογίστε την τιμή της D_n επιλύοντας με την βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων την αναδρομική σχέση που γράψατε στο (i).

Απάντηση

Για διευκόλυνση στις πράξεις βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2 από κάθε στήλη της D_n. Επειδή οι στήλες είναι n έχουμε ότι $D_n = 2^n d_n$ όπου d_n η ορίζουσα:

$$d_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Αναπτύσσουμε την d_n κατά την 1η στήλη και έχουμε

$$d_n = 2d_{n-1} - \alpha_{n-1}$$

όπου α_{n-1} η $(n-1) \times (n-1)$ ορίζουσα:

$$\alpha_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

που εύκολα φαίνεται (με ανάπτυξη κατά την 1η γραμμή) ότι ισούται με την d_{n-2}. Η ζητούμενη αναδρομική σχέση είναι λοιπόν

$$d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}, \text{ για } n \geq 2$$

Έχουμε επίσης $d_1 = 2$ και θέτουμε $d_0 = 1$ ώστε η ακολουθία να αρχίζει από $n = 0$ και να συμφωνεί στην αναδρομική σχέση. Μπορούμε τώρα να πολλαπλασιάσουμε με το 2^n ώστε να βρούμε την αναδρομική σχέση που αφορά την ορίζουσα D_n, όμως είναι ευκολότερο να επιλύσουμε αυτή την αναδρομική σχέση.

Για $n \geq 2$ λοιπόν πολλαπλασιάζουμε με x^n και έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n x^n = 2\sum_{n=2}^{\infty} d_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} x^n$$

Ή αλλιώς

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n x^n = 2x\sum_{n=2}^{\infty} d_{n-1} x^{n-1} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2} x^{n-2}$$

Θέτοντας σαν $\Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, τη γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας παίρνουμε:

$$\Delta(x) - 2x - 1 = 2x(\Delta(x) - 1) - x^2\Delta(x)$$

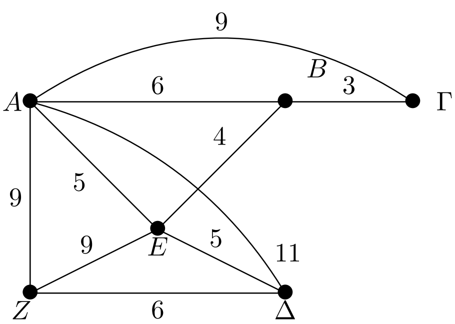
Λύνουμε ως προς $\Delta(x)$ και έχουμε:

$$\Delta(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

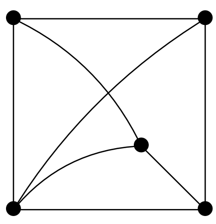
Η ακολουθία που έχει σαν γεννήτρια συνάρτηση την $\Delta(x)$ είναι λοιπόν η $d_n = \binom{2+n-1}{n} = n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ Επανερχόμενοι στην D_n παίρνουμε τελικά,

$$D_n = 2^n(n+1),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

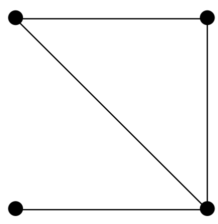
.



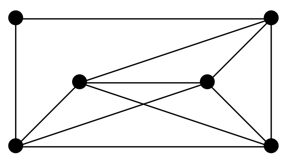
G_1



G_2



G_3



G_4