Προτασιακή Λογική

Διακριτά Μαθηματικά - Προτασιακή Λογική

Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μαθηματικών

Εισαγωγή

- Η **Λογική** ασχολείται με τους κανόνες του ορθού συλλογισμού και μελετά τους κανόνες μέσω των οποίων εξάγουμε έγκυρα συμπεράσματα.
  - **Κλασσική Λογική** (Αριστοτέλης-Χρύσιππος): Βασίζεται στην ανάπτυξη επιχειρημάτων στη φυσική γλώσσα. Η εφαρμογή της σε κλάδους των μαθηματικών είναι δύσκολη και κάποιες φορές οδηγεί σε λογικά παράδοξα.
  - **Σύγχρονη Μαθηματική Λογική**: Χρησιμοποιεί μια αυστηρή συμβολική (τυπική) γλώσσα (De Morgan, Boole). Είναι κατάλληλη για τη μελέτη μαθηματικών εννοιών αλλά και προβλημάτων από άλλους κλάδους όπως η Πληροφορική.
- Τον 20^{ο} αιώνα η Λογική αναπτύχθηκε ιδιαίτερα. Τρεις σχολές:
  - **Αλγεβρική** (Boole, Venn, Peirce κλπ.)**.** Λογισμός των προτάσεων, των συνόλων κλπ.
  - **Λογικιστική** (Frege, Russell, Whitehead). Προσπάθεια για θεμελίωση των μαθηματικών μέσω της Λογικής
  - **Φορμαλιστική** (Dedekind, Peano, Hilbert). Προσπάθεια για ορισμός αξιωματικών συστημάτων για κάθε κλάδο των Μαθηματικών.

Εισαγωγή (συνέχεια…)

- Μια **Τυπική Γλώσσα** (Formal Language) ορίζεται από
  1. Ένα **αλφάβητο**
  2. Ένα σύνολο **κανόνων σύνταξης**
- Το αλφάβητο είναι ένα πεπερασμένο (τις περισσότερες φορές) ή ακόμη και αριθμήσιμο σύνολο συμβόλων **Σ** .Π.χ.
  - Σ_1 =Τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού αλφαβήτου,
  - $\Sigma_2 = \{\alpha,\beta,\gamma\}$,
  - $\Sigma_3 = \{0,1\}$ κλπ.
- **Συμβολοσειρά (string) ή λέξη:** Παράθεση από σύμβολα του αλφαβήτου
  - Στο Σ_1: ΑΑΒΑΒ, ΚΑΛΗΜΕΡΑ
  - Στο Σ_2: ααβ, γγαβα, κλπ.
  - Στο Σ_3: 01011, 1001 κλπ.

Εισαγωγή (συνέχεια…)

- Οι **κανόνες σύνταξης** περιγράφουν ποιες από τις συμβολοσειρές μας ενδιαφέρει να συμπεριληφθούν στην γλώσσα μας

- Μια **Τυπική Γλώσσα L** είναι λοιπόν ένα σύνολο από συμβολοσειρές που όλες υπακούουν στους συντακτικούς κανόνες
  1. Στο Σ_1 : L=όλες οι λέξεις της Ελληνικής γλώσσας στα κεφαλαία
     → μη πεπερ.
  2. Στο $\Sigma_{2:}$ L={ααβγ, γγβα, βββ}, L={x| x συμβολοσειρά με τα γράμματα α,β,γ που δεν έχει 3 α συνεχόμενα} κλπ
     $\Sigma_2=\{\alpha,\beta,\gamma\}$
     πχ. $\alpha\alpha\beta\gamma\alpha\alpha \in L$
     $\beta\alpha\alpha\alpha\gamma \notin L$
  3. Μια οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. C, FORTRAN, PYTHON) είναι μια τυπική γλώσσα στο κατάλληλο αλφάβητο (λατινικό αλφάβητο + αριθμητικά ψηφία + ειδικοί χαρακτήρες)

Εισαγωγή (συνέχεια…)

- Η Συμβολική Λογική γενικά και ειδικότερα η απλούστερη μορφή της η **Προτασιακή Λογική (ΠΛ)** ορίζει μια απλή τυπική γλώσσα της οποίας μελετά την μορφή και τις ιδιότητες.
  - Με την ΠΛ μπορούμε να κωδικοποιήσουμε προτάσεις της φυσικής γλώσσας που μπορούν χαρακτηριστούν **Αληθείς** ή **Ψευδείς** (**δηλωτικές προτάσεις**) από την γνώση του φυσικού κόσμου που έχουμε.
  - **Παραδείγματα**:
    a) «Σήμερα έχει ήλιο» q √
    b) «Το ποτήρι είναι άδειο» √
    c) «Αν $\underbrace{\text{έχει ήλιο}}_{q}$, τότε δεν $\underbrace{\text{βρέχει}}_{p}$» √
    d) «Έχει ήλιο και βρέχει» √
    e) «Τι καιρό θα έχει αύριο;» ×
    f) «Θα ήθελα να πάω μια εκδρομή» ×

$q \to \neg p$

$q \wedge p$

Εισαγωγή (συνέχεια…)

- Στην ΠΛ δεν έχουμε αρκετά εργαλεία γα να μελετήσουμε το νόημα των δηλωτικών προτάσεων πέρα από το να τις κωδικοποιήσουμε και (σε επόμενο στάδιο) να τους αποδώσουμε μια τιμή Αλήθεια ή Ψέμα.
  - Οι στοιχειώδεις δηλωτικές προτάσεις (όπως οι (a) και (b)) αντιπροσωπεύονται από σύμβολα που ονομάζονται **προτασιακές μεταβλητές**.
  - Οι προτασιακές μεταβλητές συμμετέχουν στο σχηματισμό πιο σύνθετων εκφράσεων οι οποίες ονομάζονται **προτασιακοί τύποι**. Οι προτασιακοί τύποι αντιπροσωπεύουν στο πλαίσιο της ΠΛ, σύνθετες δηλωτικές προτάσεις όπως οι (c) και (d).

Η Γλώσσα της ΠΛ
Αλφάβητο

Η **γλώσσα της ΠΛ** συμβολίζεται με **Γ_0** και το αλφάβητό της χρησιμοποιεί τα παρακάτω σύμβολα:

- **Προτασιακές Μεταβλητές**:
  - *p*, *q*, *r*, … σύνολο **$M(\Gamma_0)$**
- **Σύνδεσμοι**:
  - ¬ **Άρνηση** (όχι …)
  - ∧ **Σύζευξη** (… και …)
  - ∨ **Διάζευξη** (… ή …)
  - → **Συνεπαγωγή** (αν …, τότε …)
  - ↔ **Ισοδυναμία** (… αν και μόνο αν …)
- **Παρενθέσεις**:
  - (,) **αριστερή και δεξιά παρένθεση**
- Δηλαδή το αλφάβητο της ΠΛ είναι $\Sigma = M(\Gamma_0) \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (\ ,\ )\}$

$\neg p$

$q \rightarrow \neg p$

q : έχει ήλιο

p : βρέχει

Η Γλώσσα της ΠΛ

Συντακτικό της $Γ_0$

- **Έκφραση ή συμβολοσειρά**: μια πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της $Γ_0$.

  Παράδειγμα: Η παρακάτω ακολουθία είναι έκφραση

  $$\wedge\, p \rightarrow (q \neg r) \vee p$$

- **Προτασιακός τύπος:** είναι μια έκφραση *α* η οποία υπακούει στους συντακτικούς κανόνες της ΠΛ. Η α λοιπόν είναι:

  $\beta = (q \wedge p)$

  $\gamma = (\neg q)$

  p, q... →
  - είτε προτασιακή μεταβλητή, δηλαδή $\boldsymbol{\alpha \in M(Γ_0)}$, είτε

  αναδρ. ορισμός →
  - της μορφής $\boldsymbol{(\neg\beta)}$ ή $\boldsymbol{(\beta \wedge \gamma)}$ ή $\boldsymbol{(\beta \vee \gamma)}$ ή $\boldsymbol{(\beta \rightarrow \gamma)}$ ή $\boldsymbol{(\beta \leftrightarrow \gamma)}$,

  όπου *β, γ* είναι ήδη κατασκευασμένοι προτασιακοί τύποι.

- Το σύνολο των προτασιακών τύπων της $Γ_0$ συμβολίζεται με **$T(Γ_0)$**.
- Συνηθίζεται οι τύποι να συμβολίζονται με τα γράμματα ***φ, χ, ψ,*** κ.λπ.

Παράδειγμα: Οι παρακάτω εκφράσεις είναι προτασιακοί τύποι:

p ✓ $\quad (\neg q)$ ✓ $\quad (p \rightarrow (\neg q))$ ✓ $\quad ((r \wedge p) \rightarrow (\neg q)) \quad ((\neg q) \vee \overbrace{(p \wedge (p \rightarrow (\neg q))))}$

$p \qquad \gamma \qquad (\varphi \rightarrow \gamma) \qquad (\gamma \vee \psi)$

$(r \wedge p) \in T(Γ_0) \qquad (p \wedge \chi) \in T(Γ_0)$

Συντακτικό της Γ_0 (συνέχεια…)

- **Απλοποίηση παρενθέσεων:** Για να αποφεύγεται η άσκοπη πολλαπλή χρήση παρενθέσεων που καθιστούν τους τύπους δυσανάγνωστους:
  - Διαγράφουμε τις εξωτερικές παρενθέσεις
  - Συμφωνούμε στη ακόλουθη προτεραιότητα μεταξύ των συνδέσμων:

    $$\{\neg\},\{\wedge, \vee\}, \{\rightarrow, \leftrightarrow\}$$

    όπου οι σύνδεσμοι $\{\wedge, \vee\}$ έχουν ίδια προτεραιότητα όπως και οι $\{\rightarrow, \leftrightarrow\}$.

    Σημείωση: Ορισμένοι συγγραφείς θεωρούν ότι ο $\wedge$ προηγείται του $\vee$
  - Η σειρά συνδέσμων με ίδια προτεραιότητα πρέπει να καθορίζεται με παρενθέσεις
  - Σημείωση: Στην περιοχή της *Λογικής Σχεδίασης* είναι αποδεκτές εκφράσεις με διαδοχικές συζεύξεις ή διαζεύξεις χωρίς παρενθέσεις. Π.χ. $p \wedge q \wedge r \wedge s$.
  - Διαγράφουμε τις παρενθέσεις όταν αυτές δεν είναι απαραίτητες βάσει της προηγούμενης σύμβασης.

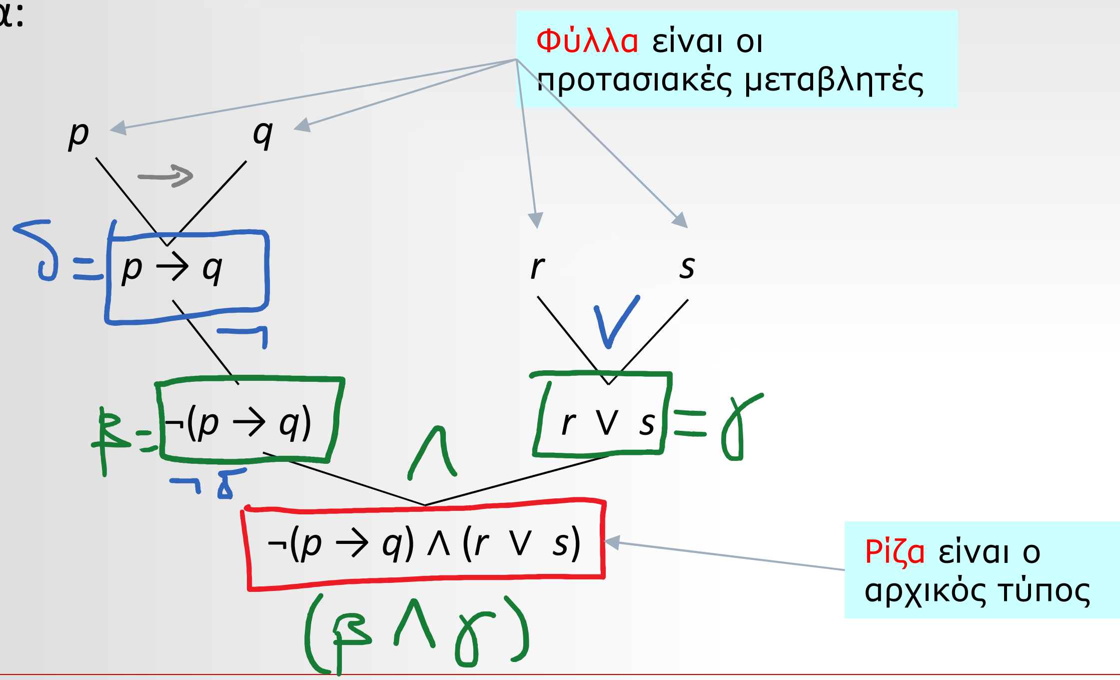
Παράδειγμα: Με την απλοποίηση των περιττών παρενθέσεων, οι τύποι του προηγούμενου παραδείγματος γίνονται:

$p \qquad (\neg q) \qquad (p \rightarrow (\neg q)) \qquad ((r \wedge p) \rightarrow (\neg q)) \qquad ((\neg q) \vee (r \wedge (p \rightarrow (\neg q))))$

Δενδροδιαγράμματα

- Η δομή ενός προτασιακού τύπου μπορεί να απεικονιστεί με τη βοήθεια ενός **δενδροδιαγράμματος.**

Παράδειγμα: Ο προτασιακός τύπος **¬(*p* → *q*)** ∧ **(*r* ∨ *s*)** μπορεί να παρασταθεί με το δενδροδιάγραμμα:



Δενδροδιαγράμματα

- Το δενδροδιάγραμμα στην ουσία δείχνει την προϊστορία κατασκευής του τύπου μας, δηλαδή πως παράχθηκε από τους συντακτικούς κανόνες της ΠΛ.

- Ισχύει το **Θεώρημα της Μοναδικής Αναγνωσιμότητας.**
  - **Ένας ορθά συνταγμένος τύπος έχει ένα και μοναδικό δενδροδιάγραμμα**.
  - Στην ουσία αυτό μας λέει ότι δεν υπάρχει παρά ένας και μόνον τρόπος να διαβάσουμε έναν τύπο της ΠΛ.

- Χρειάζεται προσοχή στις παρενθέσεις. Αν έχουμε αμφιβολία είναι καλύτερο να βάλουμε παρενθέσεις

Παραδείγματα - Ασκήσεις

- Άσκηση: Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι **προτασιακοί τύποι**, ποιες όχι, και γιατί;

  i. $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

  ii. $p \rightarrow (q \neg (p \rightarrow q))$

  iii. $p \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (q \vee r)$

  iv. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

  v. $p \rightarrow q \rightarrow r$

  vi. $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

  vii. $(p \neg \vee q) \rightarrow (p \vee \neg q)$

  viii. $(p \wedge q \vee r) \rightarrow q$

- Είναι οι i, iii, iv, vi. Άσκηση: Κατασκευάστε τα δενδροδιαγράμματα τους
- Κατασκευάστε όλους τους τύπους στο $T(\Gamma_0)$ που χρησιμοποιούν μόνο τις προτασιακές μεταβλητές p και r και το πολύ έναν λογικό σύνδεσμο.
- $p, r, \neg p, \neg r, p \wedge r, p \vee r, p \rightarrow r, p \leftrightarrow r, r \wedge p, r \vee p, r \rightarrow p, r \leftrightarrow p, p \rightarrow p, p \wedge p, p \vee p, p \leftrightarrow p, r \rightarrow r, r \wedge r, r \vee r, r \leftrightarrow r$
- Άσκηση: Κατασκευάστε όλους τους τύπους στο $T(\Gamma_0)$ που χρησιμοποιούν μόνο τις μεταβλητές p, q, r και τους συνδέσμους $\neg$, $\rightarrow$ ακριβώς μία φορά.

Αρχή της Επαγωγής στο $T(\Gamma_0)$

- Για να αποδείξουμε ότι μια ιδιότητα ισχύει για οποιοδήποτε προτασιακό τύπο, μπορούμε να εφαρμόσουμε **επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων**. Η θεωρητική διατύπωση αυτής της μεθόδου είναι η εξής:
- **Αρχή της Επαγωγής**: Αν $A \subseteq T(\Gamma_0)$, τέτοιο που
  1 • $M(\Gamma_0) \subseteq A$ και
  2 • Αν για κάθε $\chi, \psi \in A$, οι $(\neg\chi)$, $(\chi \wedge \psi)$, $(\chi \vee \psi)$, $(\chi \rightarrow \psi)$, $(\chi \leftrightarrow \psi)$ ανήκουν στο A,

  τότε $A = T(\Gamma_0)$.
- Στην πράξη ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα: A
  1. $M(\Gamma_0) \in A$
  - **Βασικό βήμα:** Αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για προτασιακές μεταβλητές.
  - **Επαγωγική Υπόθεση:** Υποθέτουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για τυχόντες προτασιακούς τύπους χ, ψ,

  2.
  - **Επαγωγικό Βήμα:** Αποδεικνύουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για τύπους της μορφής $(\neg\chi)$, $(\chi \wedge \psi)$, $(\chi \vee \psi)$, $(\chi \rightarrow \psi)$ και $(\chi \leftrightarrow \psi)$.

Αρχή της Επαγωγής στο $T(\Gamma_0)$ (συνέχεια…)

A: σύνολο π.τ. με άρτιο αρ. παρενθ.

Παράδειγμα. Χρησιμοποιώντας επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων, να δειχθεί ότι κάθε τύπος περιέχει άρτιο αριθμό παρενθέσεων.

- **Βασικό βήμα**: Αν $\varphi = p \in M(\Gamma_0)$ ο αριθμός των παρενθέσεων είναι μηδέν, ο οποίος είναι άρτιος.
- **Επαγωγική υπόθεση**: Έστω ότι τυχόντες τύποι χ, ψ περιέχουν άρτιο αριθμό παρενθέσεων. $(\Rightarrow \chi, \psi \in A)$
- **Επαγωγικό βήμα**: Εξετάζουμε περιπτώσεις:

π.χ. αν #παρ. $\psi = 2k$
τότε #παρ. $\varphi = 2k+2$
άρτιος

  - Αν $\varphi = (\neg\psi)$, ο φ περιέχει όσες παρενθέσεις περιέχει ο ψ, συν 2. Όμως από την ε.υ. ο ψ περιέχει άρτιο πλήθος παρενθέσεων. Άρα το ίδιο ισχύει και για τον φ.
  - Αν $\varphi = (\psi * \chi)$, όπου * κάποιος από τους $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Ο φ περιέχει όσες παρενθέσεις περιέχει ο ψ, συν τις παρενθέσεις του χ, συν 2. Επειδή από την ε.υ. οι χ, ψ έχουν άρτιο πλήθος παρενθέσεων, το ίδιο ισχύει και για το φ.

$$\left.\begin{array}{l}\#\text{παρ. } \psi = 2k \\ \#\text{παρ. } \chi = 2\lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \#\text{παρ. } \varphi = \underbrace{2k+2\lambda+2}_{\text{άρτιος}}$$

Αρ. Επαγ. Συμπεραίνουμε $A = T(\Gamma_0)$

Αρχή της Επαγωγής στο Τ($Γ_0$) (άσκηση)

Ορισμός. **Ύψος** ενός δενδροδιαγράμματος είναι το μήκος (δηλ. ο αριθμός των ακμών) του μακρύτερου μονοπατιού από την ρίζα προς οποιοδήποτε φύλλο.

- **Αν φ προτασιακός τύπος, συμβολίζουμε με:**
  - $\boldsymbol{\upsilon(\varphi)}$ το ύψος του δενδροδιαγράμματος του φ
  - $\boldsymbol{\mu(\varphi)}$ τον αριθμό των μεταβλητών στον φ
  - $\boldsymbol{\sigma(\varphi)}$ τον αριθμό των συνδέσμων στον φ

Άσκηση: Δείξτε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα των τύπων ότι για το δενδροδιάγραμμα οποιουδήποτε τύπου φ ισχύει:

$$\mu(\varphi) + \sigma(\varphi) \leq 2^{\upsilon(\varphi)+1} - 1$$

Απόδειξη.

- **Βάση της επαγωγής**: Αν φ προτασιακή μεταβλητή τότε $\upsilon(\varphi) = 0, \mu(\varphi) = 1$, $\sigma(\varphi) = 0$. Δηλαδή θα πρέπει $1 + 0 \leq 2^{0+1} - 1$, που **ισχύει**

Αρχή της Επαγωγής στο $T(\Gamma_0)$ (άσκηση)

- **Υπόθεση της επαγωγής.** Έστω φ και ψ τύποι και οι αντίστοιχες παράμετροι τους για τις οποίες ισχύουν:
  - $\mu(\varphi) + \sigma(\varphi) \leq 2^{\upsilon(\varphi)+1} - 1$ (για τον φ) και
  - $\mu(\psi) + \sigma(\psi) \leq 2^{\upsilon(\psi)+1} - 1$ (για τον ψ)
- **Επαγωγικό βήμα.** Διακρίνουμε περιπτώσεις
  - Περίπτωση 1: Έστω $\chi = \neg\varphi$. Τότε
    1. $\upsilon(\chi) = \upsilon(\varphi) + 1$
    2. $\mu(\chi) = \mu(\varphi)$
    3. $\sigma(\chi) = \sigma(\varphi) + 1$.

    Οπότε $\mu(\chi) + \sigma(\chi) = \mu(\varphi) + \sigma(\varphi) + 1$ *(από 2.,3.)*

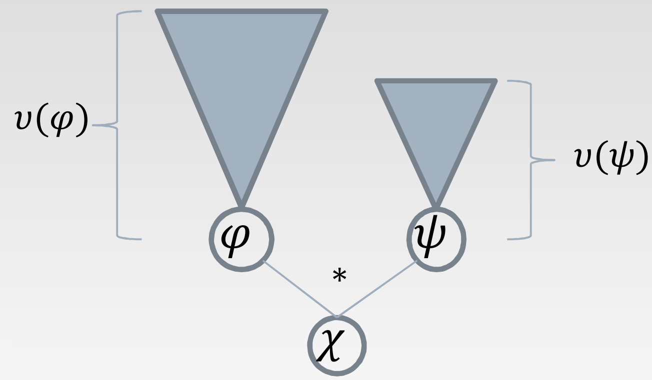
    $\leq 2^{\upsilon(\varphi)+1} - 1 + 1$ *(από την υπόθεση)*

    $= 2^{\upsilon(\chi)}$ *(από 1.)*

    $\leq 2^{\upsilon(\chi)+1} - 1$

Αρχή της Επαγωγής στο Τ(Γ$_0$) (άσκηση, συνέχεια)

- <u>Περίπτωση 2:</u> Αν τώρα $\chi = \varphi * \psi$ όπου $*$ οποιοσδήποτε διμελής σύνδεσμος, έχουμε



1. $\upsilon(\chi) = \max\{\upsilon(\varphi), \upsilon(\psi)\} + 1$
2. $\mu(\chi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$
3. $\sigma(\chi) = \sigma(\varphi) + \sigma(\psi) + 1$

Οπότε $\mu(\chi) + \sigma(\chi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi) + \sigma(\varphi) + \sigma(\psi) + 1$ *(από 2.,3.)*

$\leq 2^{\upsilon(\varphi)+1} - 1 + 2^{\upsilon(\psi)+1} - 1 + 1$ *(από υπόθεση)*

$\leq 2 \cdot 2^{\max\{\upsilon(\varphi),\upsilon(\psi)\}+1} - 1$

$= 2 \cdot 2^{\upsilon(\chi)} - 1$ *(από 1.)*

$= 2^{\upsilon(\chi)+1} - 1$ που είναι το ζητούμενο. ■

Ασκήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι τύποι της προτασιακής λογικής, ποιες όχι και γιατί; Για όσες είναι τύποι σχεδιάστε το δενδροδιάγραμμα τους και υπολογίστε το ύψος του και τον αριθμό των ακμών του.

    1. $(p_1 \to p_2 \vee \neg p_3) \leftrightarrow (p_2 \wedge p_3)$
    2. $(p \to q) \vee (q \to r) \wedge (r \to q)$
    3. $(((\neg\neg p_1 \wedge p_2) \neg p_3) \to p_1) \vee (p_2 \vee p_3)$
    4. $(p \vee q) \to r) \leftrightarrow (r \vee q)$
    5. $p_1 \vee (((p_1 \to \neg p_3 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_3)) \wedge (p_2 \to p_3)) \to p_4$
    6. $((((p_1 \to p_2) \vee p_3) \to p_4) \vee p_5) \to p_6$

2. Για έναν τύπο φ της προτασιακής λογικής ορίζουμε με $\pi(\varphi)$ το πλήθος των υποτύπων που εμφανίζονται στο δενδροδιάγραμμα του (συμπεριλαμβανομένου του φ). Π.χ. στο δενδροδιάγραμμα της σελίδας 10, $\pi(\varphi)$=8. Γράψτε έναν τύπο φ του οποίου το δενδροδιάγραμμα έχει ύψος 3 και $\pi(\varphi)$ =12.

3. Δείξτε με επαγωγή στην πολυπλοκότητα του τύπου ότι για ένα τύπο φ της προτασιακής λογικής ισχύει (δείτε την προηγούμενη άσκηση για τον ορισμό του $\pi(.)$):

$$\pi(\varphi) \leq 2\sigma(\varphi) + 1$$