Θεωρία Γραφημάτων

Διακριτά Μαθηματικά – Θεωρία Γραφημάτων

Πανεπιστήμιο Πατρών

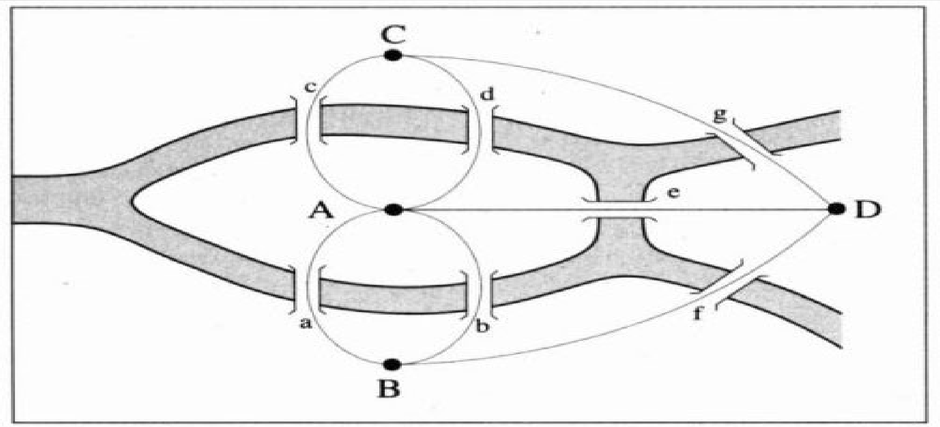
Τμήμα Μαθηματικών

Εισαγωγή

- Η Θεωρία Γραφημάτων είναι μια περιοχή των Διακριτών Μαθηματικών με πολλές εφαρμογές σε πάρα πολλές περιοχές των θετικών επιστημών, όπως πληροφορική, φυσική, επιχειρησιακή έρευνα αλλά και άλλες περιοχές των εφαρμοσμένων και θεωρητικών μαθηματικών και στις κοινωνικές επιστήμες.
- Η αξία της βρίσκεται στην ευκολία με την οποία μοντελοποιούνται με την βοήθεια γραφημάτων πολλά προβλήματα.
- Χρησιμοποιεί πολλές αποδεικτικές τεχνικές κυρίως μαθηματική επαγωγή, κατασκευαστικές αποδείξεις, μέτρηση, πιθανοτικές μεθόδους κλπ.
- Πολλά σημαντικά αλγοριθμικά προβλήματα μοντελοποιούνται σαν προβλήματα σε γραφήματα.
- Η περιοχή έχει αναπτυχθεί πάρα πολύ τις τελευταίες δεκαετίες με πολύ σημαντικά αποτελέσματα.

Εισαγωγή (συνέχεια…)

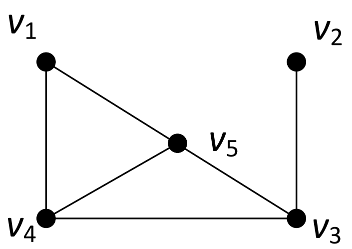
- Θεμελιωτής της θεωρίας γραφημάτων θεωρείται ο Euler που έλυσε το πρόβλημα διάσχισης των 7 γεφυρών του Königsberg στον ποταμό Prigel της Πρωσίας (τώρα Kalingrad, Ρωσία)



- Υπάρχει τρόπος να διασχίσει κάποιος όλες τις γέφυρες ακριβώς μία φορά την κάθε μία και να καταλήξει εκεί όπου ξεκίνησε;
- Στην μοντελοποίηση του προβλήματος σαν γράφημα ζητάμε αν υπάρχει τρόπος, ξεκινώντας από μία κορυφή να καταλήξουμε σε αυτή ξανά αφού διασχίσουμε κάθε ακμή ακριβώς μία φορά.

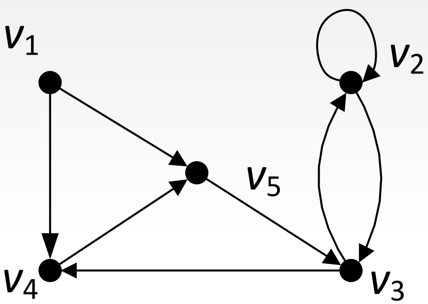
Ορισμοί

- Ένα **γράφημα** $G=(V,E)$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος. Το V είναι το σύνολο **κορυφών** (vertices) και το E είναι το σύνολο των **ακμών** (edges) του γραφήματος.
- Οι κορυφές συνήθως αριθμούνται από το 1 έως το $|V|$ (θέτουμε $n=|V|$). Το σύνολο κορυφών είναι συνεπώς το $\{1,2,\ldots,n\}=[n]$.
- Μια ακμή είναι ένα ζεύγος κορυφών του γραφήματος. Επομένως το σύνολο των ακμών είναι μια διμελής σχέση στο σύνολο $[n]$.
- **Παράδειγμα**. $G=(V,E)$ γράφημα με $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ και $E=\{\{v_1,v_4\}, \{v_1,v_5\}, \{v_4,v_5\}, \{v_5,v_3\}, \{v_4,v_3\},\{v_2,v_3\}\}$ (όταν η διμελής σχέση είναι συμμετρική, για συντομία αντί να γράψουμε και τα δύο ζεύγη (u,v) και (v,u), γράφουμε το διμελές σύνολο $\{u,v\}$ και αυτό θεωρούμε σαν ακμή).
- Ένα μεγάλο πλεονέκτημα των διμελών σχέσεων είναι ότι μπορούν να οπτικοποιηθούν. Το γράφημα του παραδείγματος παριστάνεται δίπλα.

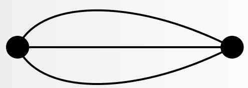


Ορισμοί (συνέχεια…)

- **Μη κατευθυντικά (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα:** Η σχέση των κορυφών είναι συμμετρική. Οι ακμές σχεδιάζονται χωρίς αρχή και τέλος. (Προηγούμενο παράδειγμα.) Σε μη κατευθυντικό γράφημα μία ακμή παριστάνεται μερικές φορές απλώς με παράθεση των κορυφών. Π.χ. η e={*u*, *v*} παριστάνεται σαν *uv*.
- Λέμε ότι η e **έχει άκρα** τις κορυφές u και v. Η e **προσπίπτει** στις κορυφές u και v.
- **Κατευθυντικά γραφήματα**: Η σχέση δεν είναι αναγκαίο να είναι συμμετρική. Οι ακμές σχεδιάζονται σαν βέλη.
- Είναι δυνατό να υπάρχουν **βρόχοι** όπως ο (v2, v2) ∈ E (ή {v2, v2} ∈ E αν είναι μη κατευθυντικό)



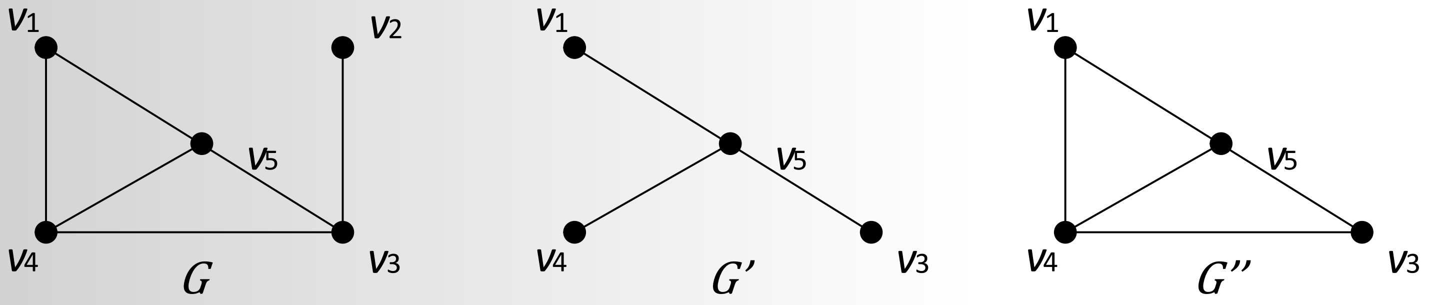
- **Πολλαπλές** (παράλληλες) ακμές.



- **Απλό γράφημα**: όχι ανακυκλώσεις, όχι παράλληλες ακμές.
- **Πολυγράφημα**: επιτρέπονται παράλληλες ακμές, όχι βρόχοι.
- Αν δεν διευκρινίζεται αλλιώς θεωρούμε ότι ένα δοθέν γράφημα είναι απλό.

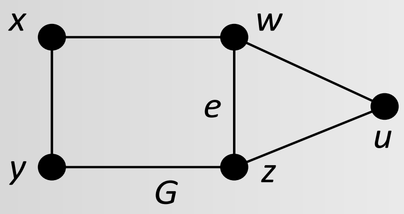
Ορισμοί (συνέχεια…)

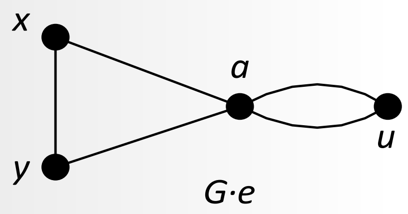
- Ένα **υπογράφημα** $G' = (V', E')$ ενός γραφήματος $G = (V, E)$ είναι ένα γράφημα με $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$ τέτοιο που κάθε ακμή $e = xy \in E'$ έχει τα άκρα της x, y στο σύνολο V'.
- Γράφουμε $G' \subseteq G$ και λέμε «το G περιλαμβάνει το G'».
- Ένα **επαγόμενο υπογράφημα** είναι ένα υπογράφημα που επιπλέον περιλαμβάνει υποχρεωτικά **κάθε ακμή** $e = xy$ του E με $x, y \in V'$.
- Παράδειγμα. G':υπογράφημα του G. G'': επαγόμενο υπογράφημα του G. Και τα δύο έχουν $V' = \{v_1, v_4, v_3, v_5\}$.



Πράξεις σε γραφήματα

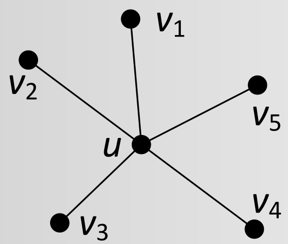
- **Αφαίρεση Ακμής.** Αν $G=(V,E)$ γράφημα και e ακμή, το $G'=G\text{-}e= (V',E')$ είναι το γράφημα με $V'=V$ και $E'=E-\{e\}$.
- **Αφαίρεση Κορυφής.** Αν $G=(V,E)$ γράφημα και u κορυφή, το $G'=G\text{-}u= (V',E')$ είναι το γράφημα με $V'=V-\{u\}$ και $E'=E-\{x|\ x$ ακμή με άκρο την κορυφή $u\}$.
- Παρατήρηση. Οι συμβολισμοί $G\text{-}e$ και $G\text{-}u$ είναι καταχρηστικοί.
- **Συμπίεση ακμής** (edge contraction). Αν $G=(V,E)$ γράφημα και $e=xy$ ακμή με άκρα τις κορυφές x και y, το $G \cdot e$ προκύπτει από το G αν οι κορυφές x και y αντικατασταθούν από μία άλλη στην οποία προσπίπτουν οι ακμές που προσέπιπταν και στην x και στην y.



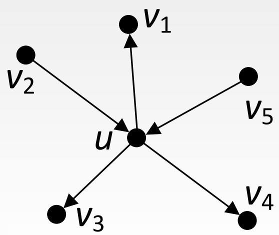


Βαθμός και γειτονιά κορυφής

- **Βαθμός** (**degree**) μιας κορυφής u (σε μη κατευθυντικό γράφημα) είναι το πλήθος των ακμών που την έχουν άκρο. Συμβολίζεται με deg(u) ή d(u). Αν d(u)=k για κάθε κορυφή u του γραφήματος, τότε το γράφημα λέγεται ***k*-κανονικό**.
- Σε κατευθυντικό γράφημα διακρίνουμε **έσω-βαθμό** (**in-degree, $d^-(u)$**) και **έξω-βαθμό** (**out-degree, $d^+(u)$**). Αντίστοιχα, είναι το πλήθος ακμών που καταλήγουν στην u και το πλήθος ακμών που ξεκινούν από την u.



d(u)=5



$d^+(u)=3$, $d^-(u)=2$

- Γειτονιά μιας κορυφής = το σύνολο των γειτονικών κορυφών της κορυφής. $N(u)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
- Σε κατευθυντικά γραφήματα διακρίνουμε **έσω-γειτονιά** και **έξω-γειτονιά**. $N^-(u)=\{v_2, v_5\}$ και $N^+(u)=\{v_1, v_4, v_3\}$.

Λήμμα της χειραψίας

- Έστω G=(V,E) γράφημα με |V|=n και |E|=m. Τότε ισχύει:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

- Αν το γράφημα είναι κατευθυντικό ισχύει αντίστοιχα:

$$\sum_{v \in V} d^{+}(v) = \sum_{v \in V} d^{-}(v) = m$$

  - Απόδειξη: Στο συνολικό άθροισμα των βαθμών κάθε ακμή συνεισφέρει 1 με το κάθε άκρο της. Άρα το άθροισμα είναι διπλάσιο του αριθμού των ακμών. Αν είναι κατευθυντικό κάθε ακμή συνεισφέρει 1 στο άθροισμα των έξω-βαθμών και 1 στο άθροισμα των έσω βαθμών.

- Πόρισμα. Το άθροισμα των βαθμών ενός (μη κατευθυντικού) γραφήματος είναι άρτιος αριθμός.
- Πόρισμα. Σε κάθε γράφημα το πλήθος των κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιο.

Βαθμός κορυφής (συνέχεια…)

- Συμβολίζουμε με $\delta(G)$ και $\Delta(G)$ τον **ελάχιστο** και τον **μέγιστο** βαθμό του γραφήματος G, αντίστοιχα. **Μέσος βαθμός** = $2m/n$.
- **Πόρισμα**: $\delta(\mathrm{G}) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$
- **Πόρισμα**: Ένα k-κανονικό γράφημα έχει $nk/2$ ακμές.
- **Ορισμός**. Η **ακολουθία βαθμών** ενός γραφήματος G είναι οι βαθμοί των κορυφών του γραφήματος συνήθως σε φθίνουσα σειρά $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$
- **Πρόταση**. Οι μη αρνητικοί ακέραιοι $d_1, \cdots, d_n$ είναι οι βαθμοί κάποιου (όχι αναγκαστικά απλού) γραφήματος αν-ν το $\sum d_i$ είναι άρτιο.
  - Απόδειξη. Το αναγκαίο το δείξαμε. Για το ικανό κατασκευάζουμε το εξής γράφημα. Εισάγουμε n κορυφές που η v_i θα έχει $\mathrm{d}(v_i) = d_i$. Επειδή $\sum d_i$ άρτιο, υπάρχει άρτιο πλήθος περιττών d_i. Ενώνουμε με μια ακμή ανά ζευγάρια τις κορυφές περιττού βαθμού. Ο βαθμός που «περισσεύει» τώρα είναι άρτιος σε κάθε κορυφή. Προσθέτουμε $\lfloor d_i/2 \rfloor$ ανακυκλώσεις στην κάθε μία.
  - Η συνθήκη δεν είναι ικανή για ύπαρξη **απλού** γραφήματος με αυτούς τους βαθμούς.

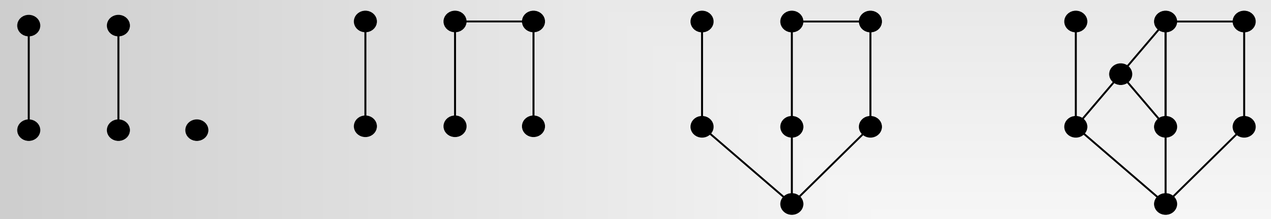
Ακολουθίες βαθμών

- Μια ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων λέγεται **γραφική** αν είναι η ακολουθία βαθμών κάποιου **απλού** γραφήματος.
- **Παράδειγμα**. Οι ακολουθίες 1,1,0 και 2,2,1,1 είναι γραφικές.
  - Η πρώτη: γράφημα αριστερά. Η δεύτερη: προκύπτει από την πρώτη αν προσθέσουμε μία κορυφή ακόμη και την ενώσουμε με την κορυφή βαθμού 0 και με μία βαθμού 1.

- **Θεώρημα.** Για n>1 μια ακολουθία d n φυσικών είναι γραφική αν-ν η ακολουθία d' είναι γραφική όπου η d' προκύπτει από την d διαγράφοντας το μεγαλύτερο στοιχείο της Δ και αφαιρώντας 1 από τα Δ μεγαλύτερα στοιχεία. Για n=1 η μόνη γραφική ακολουθία είναι η d_1=0
- Παράδειγμα. Η ακολουθία 33333221 είναι γραφική.
  - 33333221 $\rightarrow$ 2223221 $\equiv$ 3222221 $\rightarrow$ 111221 $\equiv$ 221111 $\rightarrow$10111 $\equiv$ 11110
  - Η τελευταία είναι γραφική ακολουθία, άρα και η αρχική

Ακολουθίες βαθμών (συνέχεια…)

- Ακολουθώντας αντίστροφα την διαδικασία φτάνουμε σε απλό γράφημα με τους βαθμούς της ακολουθίας *d*. Το γράφημα δεν είναι αναγκαστικά μοναδικό.
- Προηγούμενο παράδειγμα. (Μόνο οι ταξινομημένες ακολουθίες φαίνονται.)
- 11110 → 221111 → 3222221 → 33333221



- Άσκηση. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι γραφικές; Αν είναι, σχεδιάστε το αντίστοιχο απλό γράφημα. Αν όχι, αποδείξτε το.
  i. (5,5,4,3,2,2,2,1)
  ii. (5,5,4,4,2,2,1,1)
  iii. (5,5,5,3,2,2,1,1)
  iv. (5,5,5,4,2,1,1,1)