Κατηγορηματική Λογική

Εισαγωγή των Κατηγορημάτων

Στην

Τυπική γλώσσα

Εισαγωγή

- Η προτασιακή λογική μπορεί να εκφράσει μόνο συλλογισμούς όπου οι δηλωτικές προτάσεις κωδικοποιούνται σαν «μονάδες» χωρίς να υπάρχει δυνατότητα ανάλυσης στις επιμέρους δομές τους.
- Απαιτείται επέκταση της προτασιακής λογικής για να εκφραστούν οι έννοιες «Υποκείμενο» και «Κατηγόρημα»
- Βασική ανάγκη η εισαγωγή «μεταβλητών» που παίρνουν τιμές από αυθαίρετο σύνολο αντικειμένων, εννοιών.
- Για τον λόγο αυτό ορίζουμε μια καινούργια τυπική γλώσσα που ονομάζεται γλώσσα της «**Κατηγορηματικής Λογικής**» από το κυριότερο χαρακτηριστικό τους που είναι η ύπαρξη Κατηγορημάτων στις εκφράσεις της.
- Οι γλώσσες που εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία λέγονται Πρωτοβάθμιες Γλώσσες.

Τα Κατηγορήματα

- Ένα **κατηγόρημα** είναι μια σχέση που ορίζεται σε ένα σύνολο A. Ειδικότερα ένα n-μελες κατηγόρημα στο σύνολο A είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου A×A×…×A (n φορές). Έτσι:
  - Ένα μονομελές κατηγόρημα είναι απλά ένα υποσύνολο του A
  - Ένα διμελές κατηγόρημα είναι ένα σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη με στοιχεία του A.
  - Ένα τριμελές είναι σύνολο διατεταγμένων τριάδων με στοιχεία του A κλπ.
- **Συμβολισμοί.** Το κατηγόρημα συμβολίζεται με κάποιο γράμμα (καμιά φορά και με μια λέξη) π.χ. *P*. Αν το *P* είναι n-μελες με $P(x_1, x_2,\ldots x_n)$ δηλώνουμε ότι η n-αδα $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ των στοιχείων του συνόλου A σχετίζονται μεταξύ τους.
- **Παραδείγματα:**
  - Αν A είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών και το κατηγόρημα P είναι το σύνολο των αρτίων, το P(x) δηλώνει ότι ο φυσικός x είναι άρτιος.
  - Αν A είναι το σύνολο όλων των ανθρώπων και το *Γ* περιλαμβάνει όλα τα ζεύγη ανθρώπων που ο πρώτος είναι γονέας του δεύτερου, το $Γ(x_1, x_2)$ δηλώνει ότι ο άνθρωπος x_1 είναι γονέας του x_2.

Το αλφάβητο της Κατηγορηματικής Λογικής

- Σύμβολα «μεταβλητών» $x_0, x_1, x_2,\ldots$
- Οι 5 λογικοί σύνδεσμοι της προτασιακής λογικής $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- **(,)**
- Το σύμβολο «ισότητας» $\approx$
- Τα σύμβολα $\exists$ και $\forall$ (ποσοδείκτης «υπάρχει» και «για κάθε», αντίστοιχα)
- Ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{P_1, P_2,\ldots\}$ τα «κατηγορηματικά σύμβολα»
- Ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{f_1, f_2,\ldots\}$ τα «συναρτησιακά σύμβολα»
- Ένα σύνολο (ίσως κενό) $\{c_1, c_2,\ldots\}$ τα «σύμβολα σταθερών»

- Σε κάθε κατηγορηματικό και κάθε συναρτησιακό σύμβολο αντιστοιχεί ένας φυσικός που διαισθητικά δείχνει πόσα ορίσματα έχουν. Αν στο κατηγορηματικό σύμβολο P αντιστοιχεί ο φυσικός n, λέμε ότι το P είναι n-μελες. Αντίστοιχα το συναρτησιακό σύμβολο f λέγεται n-θεσιο.
- Μια γλώσσα της Κατηγορηματικής Λογικής ονομάζεται Πρωτοβάθμια και συμβολίζεται με Γ_1.

Το συντακτικό των Πρωτοβάθμιων Γλωσσών

- Δύο ειδών εκφράσεις είναι αποδεκτές στην $Γ_1$, οι **όροι** και οι **τύποι**.
- **Όροι**
  - Τα μέλη του συνόλου των μεταβλητών (συμβολίζεται με $Μ(Γ_1)$) και του συνόλου των σταθερών (συμβολίζεται με $ΣΤ(Γ_1)$)
  - Εκφράσεις της μορφής $f(β_1,β_2,\ldots,β_n)$ όπου f n-θεσιο συναρτησιακό σύμβολο και $β_1,β_2,\ldots,β_n$ ήδη κατασκευασμένοι όροι.
- **Παράδειγμα**. Έστω γλώσσα με μονοθέσιο συναρτησιακό σύμβολο *f*, διθέσιο συναρτησιακό σύμβολο *s* και ένα σύμβολο σταθεράς α. Όροι:
  - α
  - f(α), $f(f$(α)) (μερικές φορές το συμβολίζουμε σαν f^2(α), f(x) κλπ.
  - s(α,x), $s(f$(α),x), $s(s$(x,α), f(x)) κλπ.
- **Εμπειρικά** (όταν θα μιλήσουμε για ερμηνεία των τύπων της ΚΛ), οι όροι παριστάνουν στοιχεία του σύμπαντος της δομής

Το συντακτικό των Πρωτοβάθμιων Γλωσσών (συνέχεια)

- **Τύπος:**
  - Έκφραση της μορφής $t_1 \approx t_2$ όπου t_1 , t_2 ήδη κατασκευασμένοι όροι.
  - $P(t_1,t_2,\ldots t_n)$ όπου P n-μελες κατηγορηματικό σύμβολο και $t_1,t_2,\ldots t_n$ ήδη κατασκευασμένοι όροι.
  - **Παρατήρηση.** Οι εκφράσεις των δύο παραπάνω μορφών λέγονται **ατομικοί τύποι.**
  - Έκφραση της μορφής $(\neg \beta)$ ή $(\beta \wedge \gamma)$ ή $(\beta \vee \gamma)$ ή $(\beta \rightarrow \gamma)$ ή $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, όπου β, γ είναι ήδη κατασκευασμένοι τύποι.
  - Έκφραση της μορφής $\forall x \varphi$ και $\exists x \varphi$ όπου φ ήδη κατασκευασμένος τύπος.
- Οι κανόνες απλοποίησης των παρενθέσεων της ΠΛ και οι προτεραιότητες των συνδέσμων ισχύουν και εδώ. Επιπλέον τα σύμβολα $\forall$ και $\exists$ έχουν την μέγιστη προτεραιότητα.

Παραδείγματα

- Έστω μια πρωτοβάθμια γλώσσα με *P* και *Q* διμελή κατηγορηματικά σύμβολα *a, b* σύμβολα σταθερών, *s* μονομελές συναρτησιακό σύμβολο και *g* διμελές συναρτησιακό σύμβολο .
- Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις είναι τύποι της Γ_1;

1. $\exists x s(x)$	ΟΧΙ
2. $\exists x P(s(x), s(y))$	ΝΑΙ
3. $(\forall x P(x,y) \leftrightarrow \forall y P(y,z))$	ΝΑΙ
4. $\exists z \exists y (Q(g(x,y), s(x)) \rightarrow (P(z, g(a,b)) \vee \exists x P(x,z)))$	ΝΑΙ
5. $\exists \neg x P(s(x), g(y))$	ΟΧΙ
6. $(\forall x (P(x,a) \wedge Q(y,z)) \leftrightarrow \forall y (P(x,x) \rightarrow Q(x,z)))$	ΝΑΙ

Ελεύθερες και δεσμευμένες μεταβλητές

- **Ορισμός:** Στους τύπους της μορφής $\forall x\varphi$ και $\exists x\varphi$ ο τύπος φ λέγεται **εμβέλεια του ποσοδείκτη**.
- Κάθε εμφάνιση της μεταβλητής *x* στην εμβέλεια του ποσοδείκτη της λέγεται **δεσμευμένη**. Αλλιώς λέγεται **ελεύθερη**.
- Μια μεταβλητή που έχει **έστω και μία** ελεύθερη εμφάνιση, θεωρείται ελεύθερη στον τύπο
- Ένας τύπος χωρίς καμία ελεύθερη εμφάνιση μεταβλητής ονομάζεται **πρόταση**.
- Εμπειρικά οι ελεύθερες μεταβλητές πρέπει να αναφέρονται στην εκφορά του τύπου στην φυσική γλώσσα, οι δεσμευμένες, όχι.
- Πολλές φορές παριστάνουμε ένα τύπο γράφοντας σε παρένθεση (σαν να ήταν κατηγόρημα) τις ελεύθερες μεταβλητές του. Π.χ. γράφοντας $\varphi(x, y)$ εννοούμε ότι στον φ οι μεταβλητές x και y είναι ελεύθερες.

Παράδειγμα (συνέχεια…)

- Ποιες είναι οι ελεύθερες και ποιες οι δεσμευμένες εμφανίσεις των μεταβλητών στους ορθούς τύπους της προηγούμενης άσκησης;

1. $\exists x P(s(x), s(y))$

2. $(\forall x P(x,y) \leftrightarrow \forall y P(y,z))$

3. $\exists z \exists y (\forall x Q(g(x,y), s(x)) \rightarrow (P(z, g(a,b)) \vee \exists x P(x,z)))$

4. $(\forall x (P(x,a) \wedge Q(y,z)) \leftrightarrow \forall y (P(x,x) \rightarrow Q(x,z)))$

- Ελεύθερες εμφανίσεις μεταβλητών: **μπλε**
- Δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών: **κόκκινες**
- Πρόταση είναι ο τύπος 3 γιατί όλες οι εμφανίσεις όλων των μεταβλητών είναι δεσμευμένες (κόκκινες)

Η σημασιολογία των τύπων της ΚΛ

- Η απόδοση τιμής σε έναν πρωτοβάθμιο τύπο προϋποθέτει την απόδοση ρόλου στα διάφορα σύμβολα της γλώσσας και στο σύνολο από το οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές του.
- Αυτή η απόδοση ρόλου ονομάζεται **Δομή** ή **Ερμηνεία** $\mathcal{A}$ και περιλαμβάνει**:**
  - Ένα μη κενό σύνολο (το σύμπαν) |Α| από το οποίο παίρνουν τιμές οι μεταβλητές.
  - Μία n-μελή σχέση για κάθε n-μελες κατηγορηματικό σύμβολο.
  - Μία συνάρτηση από $|A|^m$ στο |Α| για κάθε m-θεσιο συναρτησιακό σύμβολο.
  - Ένα στοιχείο του σύμπαντος |Α| για κάθε σύμβολο σταθεράς.
- Αποτίμηση είναι μια απεικόνιση των μεταβλητών στα στοιχεία του σύμπαντος
  - $v: M(\Gamma_1)\rightarrow|A|$
- Δοθείσης μιας αποτίμησης v υπολογίζονται οι τιμές των όρων (των συναρτήσεων)

Η σημασιολογία των τύπων της ΚΛ

- Η έννοια «ο τύπος φ αληθεύει για την αποτίμηση v στην δομή $\mathcal{A}$,» και γράφουμε $\mathcal{A}$ |= φ[v] ορίζεται αναδρομικά.
  - Κάθε υποτύπος της μορφής $t_1 \approx t_2$ αποτιμάται σαν αληθής αν οι όροι t_1 και t_2 αποτιμώνται στο ίδιο στοιχείο του |A|.
  - Οι υποτύποι που έχουν τους λογικούς συνδέσμους αποτιμώνται όπως στην ΠΛ
  - Κάθε τύπος της μορφής $\forall x \varphi$ αποτιμάται σαν αληθής αν **για κάθε** στοιχείο του |A| στην θέση του *x*, ο τύπος φ αποτιμάται σαν αληθής
  - Κάθε τύπος της μορφής$\exists x \varphi$ αποτιμάται σαν αληθής αν **υπάρχει κάποιο** στοιχείο του |A| που αν αντικαταστήσει το *x*, ο τύπος φ να αποτιμάται σαν αληθής

Η σημασιολογία των τύπων της ΚΛ (συνέχεια)

- Ένας τύπος ονομάζεται έγκυρος αν αληθεύει σε κάθε δομή και σε κάθε αποτίμηση. Π.χ ο τύπος

$$\varphi(x,y) = \forall z \left(P(x,z) \land \exists w\big(Q(y) \to P(y,w)\big)\right)$$

$$\to \left(\forall z P(z,x) \to \forall z \left(P(x,z) \land \exists w\big(Q(y) \to P(y,w)\big)\right)\right),$$

αληθεύει ανεξάρτητα από το σύμπαν, την ερμηνεία των κατηγορημάτων P και Q και τις τιμές που αποδίδονται στις ελεύθερες μεταβλητές x και y. (Είναι της μορφής $F \to (R \to F)$ που είναι γνωστή ταυτολογία.)

Ισοδυναμίες της ΚΛ

- Στην ΚΛ ισχύουν όλοι οι νόμοι (ισοδυναμίες) της ΠΛ και επιπλέον:
- Νόμοι άρνησης ποσοδείκτη
  - $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
  - $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
- Νόμοι μετακίνησης ποσοδείκτη (όταν η μεταβλητή του ποσοδείκτη είναι ελεύθερη και στους δύο τύπους).
  - $\forall x(\varphi(x) \land \psi(x)) \equiv \forall x\varphi(x) \land \forall x\psi(x)$
  - $\exists x(\varphi(x) \lor \psi(x)) \equiv \exists x\varphi(x) \lor \exists x\psi(x)$
  - Προσοχή! Γενικά δεν ισχύει $\forall x(\varphi(x) \lor \psi(x)) \equiv \forall x\varphi(x) \lor \forall x\psi(x)$ και $\exists x(\varphi(x) \land \psi(x)) \equiv \exists x\varphi(x) \land \exists x\psi(x)$
- Επιπλέον νόμοι μετακίνησης ποσοδείκτη (όταν η μεταβλητή του ποσοδείκτη είναι απούσα ή δεσμευμένη σε κάποιο τύπο)
  - $\forall x\big(\varphi \lor \psi(x)\big) \equiv \forall x\varphi \lor \forall x\psi(x)$
  - $\exists x(\varphi \land \psi(x)) \equiv \exists x\varphi \land \exists x\psi(x)$

Παραδείγματα στην χρήση των ποσοδεικτών

- **Παράδειγμα**. Έστω δομή με σύμπαν |A| τους φοιτητές στο αμφιθέατρο, c το σύμβολο σταθεράς c=Χρήστος και ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο **Admires**(x,y) με ερμηνεία «ο φοιτητής x θαυμάζει τον φοιτητή y».
- Να γραφούν τύποι για τις παρακάτω δηλώσεις:

Δήλωση	Τύπος
Ο x θαυμάζει τον εαυτό του	Admires(x,x)
Ο x θαυμάζει τους πάντες	∀yAdmires(x,y)
Όλοι θαυμάζουν τον x	∀yAdmires(y,x)
Ο x θαυμάζει κάποιον	∃yAdmires(x,y)
Κάποιος θαυμάζει τον x	∃yAdmires(y,x)
Όλοι θαυμάζουν τον εαυτό τους	∀xAdmires(x,x)
Αν ο Χρήστος θαυμάζει κάποιον αυτός είναι ο εαυτός του	∀x(**Admires**(**Χρήστος**,x)→x≈ **Χρήστος**)
Υπάρχουν στην παρέα δύο διαφορετικά άτομα που αυτοθαυμάζονται και αλληλοθαυμάζονται αλλά δεν τους θαυμάζει κανένας άλλος	∃x∃y(x ≠y∧**Admires**(x,x)∧**Admires**(y,y)∧**Admires**(x,y)∧**Admires**(y,x) ∧∀z((z ≠ x ∧ z ≠ y)→(¬**Admires**(z,x) ∧¬**Admires**(z,y)))

Παραδείγματα (συνέχεια)

- Έχουμε πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο *P*, ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο f και ένα σύμβολο σταθεράς c. Είναι οι παρακάτω προτάσεις αληθείς;

  1. $\exists x\ \exists y \exists z\ [P(x,z) \wedge P(z,y)]$
  2. $\forall x \forall y \exists z\ [P(x,z) \wedge P(z,y)]$
  3. $\forall x \forall y\ [P(x,c) \wedge P(c,y) \rightarrow x \approx c \vee y \approx c]$
  4. $\forall x \forall y\ [P(x,c) \wedge P(c,y) \rightarrow P(x,y)]$
  5. $\exists x (f(x)=c)$

α) Στο σύνολο των φυσικών αριθμών *N*, όπου το P(x, y) σημαίνει x<y, το f(x) δίνει τον επόμενο του x και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο 7.

β) Στο διμελές σύνολο {0,1} όπου το P(x, y) σημαίνει $x \leq y$, f(x)=1-x και η σταθερά c ερμηνεύεται με το στοιχείο 0.

Παραδείγματα (συνέχεια)

- Έστω η δομή με σύμπαν το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$, ένα μονομελές συναρτησιακό σύμβολο «’» δύο διμελή συναρτησιακά «$\otimes$» και «$\oplus$» και το σύμβολο σταθεράς 0. Ερμηνεύουμε το «’» σαν την συνάρτηση «επόμενος» , (δηλαδή $x' = x + 1$), το $\oplus$ σαν την πρόσθεση και το $\otimes$ σαν τον πολλαπλασιασμό. Τέλος, ερμηνεύουμε το «0» σαν τον φυσικό 0.
- Να γραφούν τύποι που να δηλώνουν:
  - «Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι άρτιος»
    - Το 2 δεν υπάρχει στην γλώσσα μας αλλά έχουμε την συντομογραφία $2 = (0')'$
    - Ο τύπος $\exists z(x \approx (2 \otimes z)')$ λέει «ο x είναι περιττός». Άρα ο τύπος μας θα είναι:

    $$\forall x \forall y(\exists z(x \approx (2 \otimes z)') \wedge \exists z(y \approx (2 \otimes z)') \to \neg \exists z(x \oplus y \approx (2 \otimes z)'))$$

    - Παρατήρηση: Για ευκολία μπορούμε να θέσουμε $\mathrm{Odd}(x) = \exists z(x \approx (2 \otimes z)')$ και $\mathrm{Even}(x) = \neg \mathrm{Odd}(x)$. Οπότε ο παραπάνω τύπος γίνεται:

    $$\forall x \forall y(\mathrm{Odd}(x) \wedge \mathrm{Odd}(y) \to \mathrm{Even}(x \oplus y))$$

  - «Ο x είναι πρώτος αριθμός»

    $$\mathrm{Prime}(x) = \neg(x \approx 0) \wedge \neg(x \approx 1) \wedge \forall y \forall z(x \approx y \otimes z \to (x \approx y \vee x \approx z))$$

Κατηγορηματικός λογισμός

- Με προσθήκη κάποιων αξιωματικών σχημάτων ακόμα στα ΑΣ1-3 της ΠΛ δημιουργούμε το σύστημα <A_1,K_1> με την βοήθεια του οποίου κάποιοι τύποι χαρακτηρίζονται ως έγκυροι και ορίζονται όπως στην ΠΛ, **τυπικές αποδείξεις**.
- Στην κατηγορηματική λογική ισχύουν τα:
- **Θεώρημα Εγκυρότητας του ΚΛ**. Αν Τ σύνολο τύπων της Γ_1 και φ τύπος της Γ_1:

  αν $T \vdash \varphi$, τότε $T \vDash \varphi$
- **Θεώρημα Πληρότητας του ΚΛ (Gödel 1930)**. Αν Τ σύνολο τύπων της Γ_1 και φ τύπος της Γ_1:

  αν $T \vDash \varphi$, τότε $T \vdash \varphi$

Και μετά, τι;

- Οι πρωτοβάθμιες γλώσσες παρόλο που είναι πολύ εκφραστικότερες από την προτασιακή λογική και πάλι δεν μπορούν να εκφράσουν ακόμη και πολύ απλές ιδιότητες σε κάποια σύμπαντα.
  - Π.χ. δεν μπορούν να εκφραστούν όλες οι ιδιότητες των φυσικών αριθμών, δηλαδή η αριθμητική.
  - Δεν μπορεί να εκφραστεί η ιδιότητα ότι ένα γράφημα είναι συνεκτικό.
- Αν θέλουμε να εκφράσουμε τέτοιες ιδιότητες πρέπει να επεκτείνουμε την γλώσσα μας.
- Αυτή η επέκταση ορίζει τις «δευτεροβάθμιες» γλώσσες (στην συνέχεια τριτοβάθμιες κλπ) όπου οι ποσοδείκτες τώρα επιτρέπεται να εφαρμόζονται σε κατηγορήματα. Π.χ. αν P είναι κατηγορηματικό σύμβολο είναι δυνατό να γραφεί τύπος της μορφής

$$\exists P[\ldots.]$$

Και μετά, τι; (συνέχεια…)

- Όμως ο Gödel to 1931 απέδειξε το περίφημο…
- **Θεώρημα της μη Πληρότητας.** Οποιαδήποτε τέτοιου είδους γλώσσα που είναι αρκετά εκφραστική ώστε να πει όλες τις ιδιότητες της αριθμητικής δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα και συνεπής και πλήρης.
- Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε συνεπές σύστημα για την αριθμητική υπάρχουν αληθείς ιδιότητες οι οποίες δεν μπορούν να αποδειχθούν.
- Ή, αν έχουμε ένα σύστημα που αποδεικνύει όλες τις ιδιότητες της αριθμητικής, θα είναι κατ' ανάγκη μη συνεπές, δηλαδή θα αποδεικνύει και αντιφάσεις.