Θεωρία Γραφημάτων

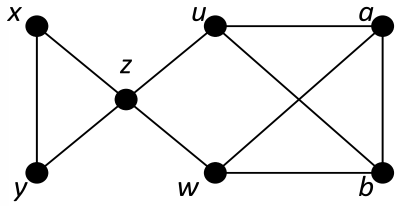
Διακριτά Μαθηματικά – Θεωρία Γραφημάτων

Πανεπιστήμιο Πατρών

Τμήμα Μαθηματικών

Διαδρομές και κύκλοι

- Ένας **περίπατος μήκους *k*** είναι μια ακολουθία $v_0, e_1, v_1, \cdots, e_k, v_k$ από εναλλασσόμενες κορυφές και ακμές τέτοια που $e_i = v_{i-1}v_i$ για κάθε $1 \leq i \leq k$.
  - Μία **διαδρομή** είναι ένας περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές
  - Ένα **μονοπάτι** είναι μια διαδρομή χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές
  - Ένας **κύκλος** είναι μια **κλειστή διαδρομή**, δηλαδή μια διαδρομή όπου $v_0 \equiv v_k$
  - Ένας **απλός κύκλος** είναι ένα κλειστό μονοπάτι
    - Αν δεν διευκρινίζουμε αλλιώς, λέγοντας «κύκλος» θα εννοούμε απλό κύκλο
- Οι διαδρομές, περίπατοι κλπ. σε **απλά** γραφήματα παριστάνονται απλούστερα μόνο με παράθεση των κορυφών τους (όχι και με τις ενδιάμεσες ακμές)
  - Περίπατος: x,z,y,z,w,a,u,z,w
  - Διαδρομή: u,b,a,w,b,u,z
  - Μονοπάτι: x,z,u,b,a
  - Κύκλος (όχι απλός): w,z,x,y,z,u,a,w
  - Κύκλος (απλός): z,u,a,b,w,z

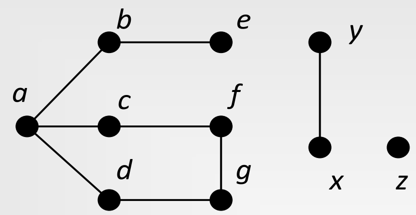


Διαδρομές και κύκλοι (συνέχεια…)

- **Λήμμα.** Μία διαδρομή (άρα και ένας περίπατος) με άκρα u, v περιλαμβάνει ένα μονοπάτι με άκρα u,v
  - **Απόδειξη** (Σχήμα). Επαγωγή στο μήκος k της διαδρομής. Ισχύει για k=0 (απλή κορυφή). Για το επαγωγικό βήμα έστω w μια κορυφή στην διαδρομή που επαναλαμβάνεται περισσότερες της μίας φορές, v_i η πρώτη εμφάνιση της w στην διαδρομή και v_j η τελευταία (δηλαδή $w \equiv v_i \equiv v_j$). Αφαιρούμε το τμήμα της διαδρομής από την v_{i+1} στην v_j. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να μην έχουμε επαναλαμβανόμενη κορυφή, δηλαδή παίρνουμε u-v μονοπάτι.
- **Λήμμα.** Μία κλειστή διαδρομή περιττού μήκους περιλαμβάνει έναν (απλό) κύκλο περιττού μήκους.
  - **Απόδειξη** (Σχήμα). Παραλλαγή της παραπάνω. Εκτελούμε επαναληπτικά την παραπάνω διαδικασία και αφαιρούμε κάθε φορά υπο-διαδρομή **άρτιου** μήκους (δηλαδή με j-i άρτιο). Το μήκος της κλειστής διαδρομής που μένει είναι περιττό. Όταν δεν υπάρχει άλλη κλειστή υπο-διαδρομή άρτιου μήκους τότε αν δεν υπάρχει ούτε περιττού, η αρχική έγινε κύκλος, αλλιώς μια επαναλαμβανόμενη κορυφή και η **αμέσως επόμενη** εμφάνιση της, είναι περιττός απλός κύκλος.
- **Παρατήρηση.** Αν η κλειστή διαδρομή είναι άρτια μπορεί να μην περιλαμβάνει κύκλο (π.χ. μονοπάτι που επαναλαμβάνεται προς τα πίσω)

Συνεκτικότητα

- Ένα γράφημα G λέγεται **συνεκτικό** αν για οποιοδήποτε ζευγάρι κορυφών του *u*, *v* υπάρχει ένα *u*-*v* μονοπάτι (δηλ. μονοπάτι με άκρα τις κορυφές *u* και *v*)
- **Συνεκτική συνιστώσα** είναι ένα **μεγιστοτικό συνεκτικό υπογράφημα**. Μια **τετριμμένη συνιστώσα** αποτελείται από μια μόνο κορυφή του G (απομονωμένη)



- Το πιο πάνω γράφημα έχει 3 συνεκτικές συνιστώσες με σύνολα κορυφών {a,b,c,d,e,f,g}, {x,y}, {z}
- Ένα **σημείο κοπής** είναι μία κορυφή που η αφαίρεση της αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Σημεία κοπής: a, b.
- **Γέφυρα** είναι μια ακμή που η αφαίρεση της αυξάνει τον αριθμό των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος. Γέφυρες: ab, be, xy

Συνεκτικότητα (συνέχεια…)

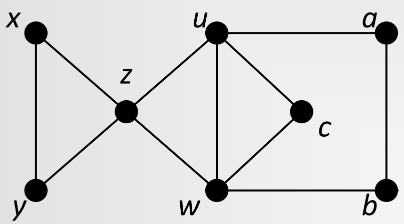
- Ένα γράφημα χωρίς σημείο κοπής λέγεται **δισυνεκτικό**.
- Πρόταση. Μια ακμή είναι γέφυρα αν-ν δεν ανήκει σε κύκλο.

  Απόδειξη. Έστω e=xy γέφυρα που βρίσκεται στην συνιστώσα H του γραφήματος. Άρα υπάρχουν u, v $\in \mathrm{V(H)}$ που η e βρίσκεται σε κάθε u-v μονοπάτι. (Αλλιώς η αφαίρεση της e δεν θα άφηνε τις u, v σε διαφορετικές συνιστώσες.) Άρα και οι x, y είναι σε διαφορετικές συνιστώσες στο H-e και συνεπώς δεν υπάρχει x-y μονοπάτι στην H-e. Επομένως δεν υπάρχει κύκλος C που να περιλαμβάνει τη e γιατί αλλιώς το C-e θα ήταν x-y μονοπάτι. Αντίστροφα, αν η e δεν είναι γέφυρα, τότε τα x, y θα είναι στην ίδια συνιστώσα στο G-e, άρα θα υπάρχει διαδρομή άρα μονοπάτι m από το x στο y στο G-e, άρα και κύκλος στο G, το m και η ακμή e.
- Ένα γράφημα είναι δισυνεκτικό αν-ν κάθε 2 κορυφές του u, v βρίσκονται σε κύκλο.

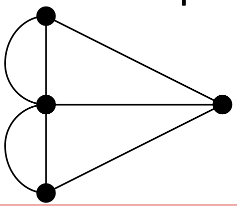
  Απόδειξη. Έστω x σημείο κοπής στη συνιστώσα H. Άρα υπάρχουν κορυφές u, v ∈ V(H) που βρίσκονται σε διαφορετική συνιστώσα στο G-x. Άρα η x βρίσκεται σε κάθε u-v μονοπάτι και συνεπώς οι u,v δεν βρίσκονται σε κύκλο. Αντίστροφα, αν οι u, v δεν βρίσκονται σε κύκλο, τότε αναγκαστικά υπάρχει μία κορυφή x που βρίσκεται πάνω σε κάθε u-v μονοπάτι. Συνεπώς η κορυφή x είναι σημείο κοπής.

Κύκλος Euler

- **Κύκλος Euler** είναι μια κλειστή διαδρομή που περιλαμβάνει όλες τις ακμές του γραφήματος. Ένα γράφημα που έχει κύκλο Euler λέγεται **γράφημα Euler**.
- **Παράδειγμα**. Στο παρακάτω γράφημα ένας κύκλος Euler είναι ο x, y, z, w, b, a, u, c, w, u, z, x



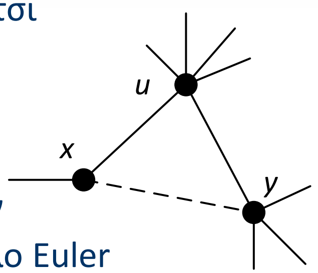
- **Θεώρημα (Euler)**. Ένα γράφημα έχει κύκλο Euler αν-ν είναι συνεκτικό και κάθε κορυφή του έχει άρτιο βαθμό.
- **Παρατήρηση**. Το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg είναι ισοδύναμο με το αν υπάρχει κύκλος Euler στο γράφημα:



- Προφανώς όχι, επειδή υπάρχει κορυφή περιττού βαθμού

Κύκλος Euler (συνέχεια…)

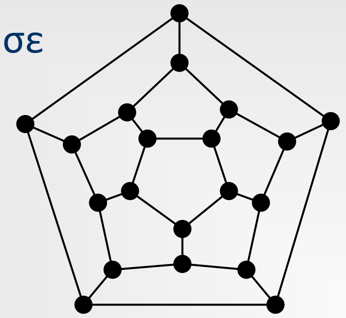
- Απόδειξη του Θεωρήματος του Euler.
  - **Αναγκαίο.** Προφανώς το γράφημα πρέπει να είναι συνεκτικό. Επιπλέον, ο κύκλος Euler επισκέπτεται κάθε κορυφή με μια ακμή και φεύγει από αυτή με μια άλλη. Άρα κάθε επίσκεψη του σε μια κορυφή απαιτεί βαθμό +2 από την προηγούμενη. Συνολικά, άρτιο.
  - **Ικανό**. Επαγωγή στο πλήθος των ακμών *m*.
    - **Βάση**. Για *m*=1, μία κορυφή με μία ανακύκλωση έχει κύκλο Euler.
    - **Υπόθεση**. Έστω ότι κάθε συνεκτικό γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και το πολύ $m \geq 1$ ακμές, έχει κύκλο Euler.
    - **Βήμα**. Έστω *G* συνεκτικό γράφημα με κορυφές άρτιου βαθμού και *m*+1 ακμές. Έστω *u* μία κορυφή που συνδέεται με τις κορυφές *x* και *y* που δεν συνδέονται μεταξύ τους (υπάρχουν 3 τέτοιες κορυφές). Αφαιρούμε τις ακμές *ux* και *uy* και προσθέτουμε την *xy*. Το γράφημα *G'* έχει τώρα m ακμές και οι κορυφές του έχουν πάλι άρτιο βαθμό. Αν λοιπόν είναι συνεκτικό έχει (ε.υ.) κύκλο Euler. Βρίσκουμε κύκλο Euler στο αρχικό τροποποιώντας τον κύκλο Euler του *G'* έτσι ώστε αντί να περάσει από την *xy* να περάσει από την *xu* και μετά από την *uy*.
      Αν το *G'* δεν είναι συνεκτικό, τότε οι *x*,*y* βρίσκονται σε μία συνιστώσα H_1 και η *u* σε άλλη H_2 .Οι H_1 και H_2 έχουν κάθε μία κύκλο Euler, οπότε στο αρχικό γράφημα βρίσκουμε τον κύκλο Euler στην H_1 όμως αντί να περάσουμε από την ακμή *xy* όταν φτάσουμε στην *x* ακολουθούμε την ακμή *xu*, πάμε στην H_2 ακολουθούμε τον κύκλο Euler της H_2 και επιστρέφουμε στην H_1 μέσω της *uy* και ολοκληρώνουμε τον κύκλο Euler.



Κύκλος Hamilton

- Ο **κύκλος Hamilton** είναι ένας απλός κύκλος που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος. Ένα γράφημα με κύκλο Hamilton λέγεται **γράφημα Hamilton** (Hamiltonian graph).
- Αν οι κορυφές είναι n τότε ο κύκλος έχει n κορυφές και n ακμές.
  - Το δωδεκάεδρο που απασχόλησε

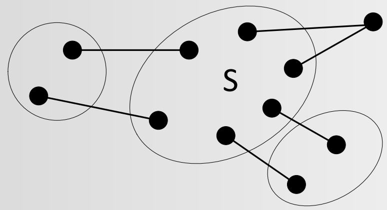
    τον Sir William Hamilton

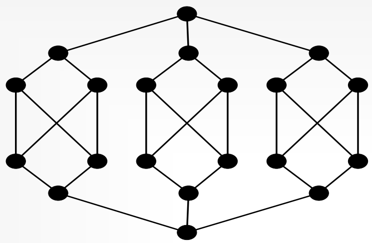


- **Μονοπάτι Hamilton** είναι ένα απλό μονοπάτι το οποίο περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος. Αν από ένα κύκλο Hamilton αφαιρέσουμε μια ακμή παίρνουμε μονοπάτι Hamilton.
- Σε αντίθεση με τα γραφήματα Euler δεν γνωρίζουμε καλό χαρακτηρισμό (δηλαδή εύκολα ελέγξιμη συνθήκη) για τα γραφήματα Hamilton.

Κύκλος Hamilton (συνέχεια…)

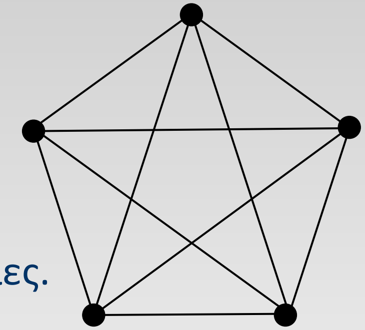
- Υπάρχουν μόνο αναγκαίες (και κάποιες ικανές) συνθήκες που μπορεί να μας διευκολύνουν όταν εξετάζουμε αν ένα γράφημα είναι Hamiltonian.
- Προφανείς παρατηρήσεις.
  - Γράφημα με κορυφή βαθμού 1 δεν μπορεί να έχει κύκλο Hamilton.
  - Αν μια κορυφή έχει βαθμό 2, ο κύκλος Hamilton αναγκαστικά περνά από τις ακμές της.
- **Μια αναγκαία συνθήκη**. Αν το G έχει κύκλο Hamilton τότε για κάθε μη κενό $S \subseteq V(G)$, το γράφημα G-S έχει το πολύ $|S|$ συνιστώσες.





- Π.χ. το γράφημα στα δεξιά **δεν** έχει κύκλο Hamilton.
- **Μια ικανή συνθήκη (Θεώρημα του Dirac)**. Αν το G είναι ένα απλό γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές και $\delta(G) \geq n(G)/2$ τότε το G είναι Hamiltonian.

Ειδικά γραφήματα



- Κάποια γραφήματα έχουν το δικό τους σύμβολο ή/και όνομα.
- **Πλήρες γράφημα** n κορυφών (αλλιώς **κλίκα** n κορυφών), K_n.
  - Απλό γράφημα n κορυφών που κάθε μία συνδέεται με όλες τις άλλες.
  - Είναι κανονικό γράφημα βαθμού n-1.
  - Το πλήθος των ακμών του είναι $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.
- Ο κύκλος C_n: Απλός κύκλος με n κορυφές (και άρα και n ακμές).
- Το μονοπάτι n κορυφών P_n. Έχει n-1 ακμές.
- Διμερές είναι ένα γράφημα που οι κορυφές του διαμερίζονται σε δύο σύνολα έτσι ώστε κάθε ακμή να έχει τα δύο της άκρα σε διαφορετικά σύνολα.
  - Όταν το πρώτο σύνολο έχει n κορυφές και το δεύτερο m και κάθε κορυφή του πρώτου συνόλου ενώνεται με κάθε κορυφή του δεύτερου, έχουμε ένα **πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$**.
  - Πλήθος ακμών του $K_{n,m}$=nm