Προτασιακός Λογισμός

Η συντακτική προσέγγιση της Προτασιακής Λογικής

Συντακτική Προσέγγιση

- Σύμφωνα με τη **συντακτική προσέγγιση**, η εγκυρότητα ενός συλλογισμού προκύπτει από την δυνατότητα παραγωγής του **συμπεράσματος**, από τις **υποθέσεις**, μέσω μιας **τυπικής απόδειξης**.
- Μια **τυπική απόδειξη** είναι μια πεπερασμένη ακολουθία τύπων η οποία, δεδομένου ενός συνόλου τύπων που λέγονται **υποθέσεις**, καταλήγει μέσω μιας αυστηρά καθορισμένης διαδικασίας στον προς απόδειξη τύπο που λέγεται **συμπέρασμα**.
- Κατά τη διαδικασία κατασκευής μιας τυπικής απόδειξης δεν εμπλέκεται καθόλου η λογική της απόδοσης τιμών αληθείας, αφού η έννοια της αποτίμησης αφορά τη **σημασιολογική προσέγγιση**.

Το αξιωματικό σύστημα της ΠΛ

- Το **αξιωματικό σύστημα** της ΠΛ= <A_0, K_0> αποτελείται από:
- Το A_0, που είναι το σύνολο των προτασιακών τύπων που προκύπτουν από τα **αξιωματικά σχήματα:**
  - **ΑΣ1.** $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
  - **ΑΣ2.** $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
  - **ΑΣ3.** $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

  αντικαθιστώντας τους τύπους φ, χ, ψ με οποιουσδήποτε τύπους.
- Το K_0, που περιέχει μόνο τον αποδεικτικό **κανόνα «απόσπασης»** (**Modus Ponens**), ο οποίος περιγράφεται ως εξής:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi}$$

Ο κανόνας **MP** επιτρέπει την παραγωγή του τύπου ψ, αν σε προηγούμενα βήματα της τυπικής απόδειξης εμφανίζονται οι τύποι φ και $\varphi \rightarrow \psi$.

Τυπικές αποδείξεις (συνέχεια…)

- Τα ΑΣ είναι πρότυπα («πατρόν») αποδεκτών συλλογισμών τους οποίους δεχόμαστε σαν έγκυρους *μόνο από την μορφή* τους (ανεξάρτητα από τους μετέχοντες τύπους φ, χ, ψ).
  - Το ΑΣ1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ τυποποιεί τον συλλογισμό: «Αν κάτι ισχύει (χωρίς προϋποθέσεις) τότε, αν ισχύει κάτι άλλο ισχύει και το πρώτο»
  - Το ΑΣ2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ τυποποιεί τον συλλογισμό: «Αν μια συνεπαγωγή ισχύει όταν ισχύει «κάτι» τότε η συνεπαγωγή ισχύει όταν η υπόθεση και το συμπέρασμα της ισχύουν όταν ισχύει το «κάτι».
  - Το ΑΣ3 $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$ τυποποιεί τον συλλογισμό: «Αν με μια υπόθεση έχουμε ένα συμπέρασμα, τότε αν με την υπόθεση δεν ισχύει το συμπέρασμα τότε δεν ισχύει η υπόθεση»
- **Προσοχή:** Οι παραπάνω εξηγήσεις είναι απλά για την σύνδεση με τους γενικά αποδεκτούς συλλογισμούς της φυσικής γλώσσας. Όμως τα ΑΣ είναι **αξιωματικά πρότυπα** συλλογισμών. (Υπάρχουν και άλλα ανάλογα συστήματα.)

Τυπικές αποδείξεις (συνέχεια…)

- Π.χ. Ο παρακάτω τύπος ανήκει στο A_0 (είναι έγκυρος).

  $$\neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \rightarrow p_4) \rightarrow ((p_3 \vee \neg p_4) \wedge \neg p_1 \rightarrow \neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \rightarrow p_4))$$

- Προκύπτει από το ΑΣ1 αν στην θέση του *φ* θέσουμε τον $\neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \rightarrow p_4)$ και στην θέση του *ψ* τον $(p_3 \vee \neg p_4) \wedge \neg p_1$

  $$\neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \rightarrow p_4) \rightarrow ((p_3 \vee \neg p_4) \wedge \neg p_1 \rightarrow \neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_2 \rightarrow p_4))$$

- **Σημείωση:** Η αντικατάσταση των συμβόλων *φ*, *χ*, *ψ* πρέπει να γίνει με τον ίδιο τύπο σε κάθε εμφάνιση του συμβόλου.
  - Π.χ. Στο ΑΣ2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ κάθε εμφάνιση του *φ* πρέπει να αντικατασταθεί με τον **ίδιο** τύπο, το ίδιο και για τα *ψ* και *χ*.
- Εφαρμογή του **modus ponens**. Αν έχουν δειχθεί έγκυροι οι τύποι
  - $(\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\chi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ και $(\varphi \rightarrow \neg\psi)$, τότε είναι έγκυρος και ο τύπος $\chi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Τυπικές αποδείξεις (συνέχεια…)

- Έστω $T \subseteq T(\Gamma_0)$ το σύνολο υποθέσεων και φ ο προς απόδειξη τύπος.
- Μια **τυπική απόδειξη** του φ από το Τ στο ΠΛ= $\langle A_0, K_0 \rangle$ είναι μια ακολουθία:

  1. φ_1
  2. φ_2

     ….

  n. φ_n

  όπου ο **φ_n ταυτίζεται με το συμπέρασμα φ** και για κάθε $i = 0,1,2,\ldots,n$,

  - **$\varphi_i \in T$**, δηλαδή ο **φ_i είναι υπόθεση**, ή
  - **$\varphi_i \in A_0$**, δηλαδή ο **φ_i προκύπτει** από μια **συντακτική αντικατάσταση στα ΑΣ1-3**, ή
  - ο **φ_i** είναι **άμεση συνέπεια προηγουμένων τύπων** βάσει του κανόνα **Modus Ponens**.

- Αν η παραπάνω κατασκευή είναι δυνατή, τότε γράφουμε **$T \vdash_{ΠΛ} \varphi$**, και λέμε ότι «**ο φ αποδεικνύεται στον ΠΛ από το Τ**».
- Αν $\emptyset \vdash_{ΠΛ} \varphi$, γράφουμε **$\vdash_{ΠΛ} \varphi$** και λέμε ότι «**ο φ είναι τυπικό θεώρημα του ΠΛ**».

Τυπικές αποδείξεις (συνέχεια…)

- **Παράδειγμα**. Να δειχθεί ότι $\varphi \to \psi \vdash \neg\chi \to (\varphi \to \psi)$.
  - Το βασικό σχήμα της τυπικής απόδειξης θα είναι όπως παρακάτω.

1. $\varphi \to \psi$	**Υπόθεση**
…	
…	
***n*.** $\neg\chi \to (\varphi \to \psi)$	**Συμπέρασμα**

- Η μέθοδος που ακολουθούμε δεν τυποποιείται πλήρως αλλά περιλαμβάνει:
  1. Ανήκει το συμπέρασμα στις υποθέσεις; Εδώ μοναδική υπόθεση είναι ο τύπος $\varphi \to \psi$ και άρα η απάντηση είναι όχι.
  2. Προκύπτει το συμπέρασμα με απευθείας αντικατάσταση με κάποιους τύπους σε κάποιο από τα τρία ΑΣ; Εδώ η μορφή του συμπεράσματος μας θυμίζει μόνο το ΑΣ1 αλλά οι τύποι που εμφανίζονται στις θέσεις του τύπου φ του ΑΣ1 είναι διαφορετικοί. (Είναι ο $\neg\chi$ και ο ψ.) Άρα ο τύπος δεν προκύπτει με απευθείας αντικατάσταση σε κάποιο ΑΣ.

Τυπικές αποδείξεις (συνέχεια…)

- Συνεπώς ο μόνος τρόπος για να προκύψει το συμπέρασμα είναι μέσω της εφαρμογής του κανόνα Modus Ponens από δύο τύπους της μορφής
  - ξ
  - $\xi \rightarrow (\neg\chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$
- Ποιος θα μπορούσε να είναι ο τύπος ξ;
- Ο ξ θα πρέπει να μπορεί να παραχθεί με ανάλογες σκέψεις από τις υποθέσεις αλλά επιπλέον θα πρέπει να είναι και υπόθεση στην συνεπαγωγή παραπάνω.
- Η τελευταία σκέψη μας θυμίζει το ΑΣ1 με τον τύπο $\xi=\varphi \rightarrow \psi$ στην θέση του φ του ΑΣ1.

Τυπικές αποδείξεις (συνέχεια…)

- Οπότε τελικά η τυπική απόδειξη $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ περιλαμβάνει:

1. $\varphi \rightarrow \psi$	**Υπόθεση**
2. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$	**ΑΣ1**, όπου θέσαμε $\varphi \rightarrow \psi$ στη θέση του φ και $\neg\chi$ στη θέση του ψ.
3. $\neg\chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	**1,2 MP**

- **Παρατήρηση**: Συνήθως η κατασκευή μιας τυπικής απόδειξης σε πιο σύνθετα παραδείγματα είναι αρκετά ή πολύ δύσκολη, καθώς οι επιλογές μας σε κάθε βήμα της κατασκευής δεν είναι απαραίτητα μοναδικές.

Τυπικές αποδείξεις

- **Παράδειγμα**. Να δειχθεί ότι $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \psi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$.

1.	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	**Υπόθεση**
2.	ψ	**Υπόθεση**
3.	$\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	**ΑΣ1**, όπου αντικαταστήσαμε τον τύπο φ με τον τύπο ψ και τον τύπο ψ με τον τύπο φ.
4.	$\varphi \rightarrow \psi$	**2,3 MP**
5.	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$	**ΑΣ2**, χωρίς αντικαταστάσεις
6.	$(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$	**1,5 MP**
7.	$\varphi \rightarrow \chi$	**4,6 MP**

Τυπικές αποδείξεις

- Ακόμα και «προφανείς» τύποι κάποιες φορές έχουν σύνθετη τυπική απόδειξη.

Παράδειγμα. Να δειχθεί ότι $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

1. $[\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)]$ **ΑΣ2,** όπου στην θέση του χ μπήκε ο φ και στην θέση του ψ ο $\varphi \rightarrow \varphi$
2. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ **ΑΣ1,** όπου στην θέση του ψ μπήκε ο $\varphi \rightarrow \varphi$
3. $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ **1,2, MP**
4. $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$ **ΑΣ1,** όπου στην θέση του ψ μπήκε ο φ
5. $\varphi \rightarrow \varphi$ **3,4 MP**

- **Άσκηση.** Να δειχθεί ότι $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

Μεταθεωρήματα

- Για να βοηθηθούμε στην κατασκευή τυπικών αποδείξεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τα παρακάτω (μετα)θεωρήματα. Για κάθε σύνολο τύπων T και για τυχόντες τύπους φ, ψ, ισχύει:
- **Θεώρημα Απαγωγής**:

  Αν $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, τότε $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$
- **Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής**:

  $T \cup \{\varphi\} \vdash \neg\psi$ αν-ν $T \cup \{\psi\} \vdash \neg\varphi$
- **Ορισμός.** Ένα σύνολο τύπων T, λέγεται **αντιφατικό**, αν υπάρχει τύπος φ, τέτοιος ώστε $T \vdash \varphi$ και $T \vdash \neg\varphi$. Σε αντίθετη περίπτωση το T λέγεται **συνεπές**.
- **Θεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο**:

  Αν το $T \cup \{\varphi\}$ είναι **αντιφατικό**, τότε $T \vdash \neg\varphi$.

Μεταθεωρήματα (συνέχεια…)

- Το **Θεώρημα Απαγωγής** χρησιμεύει όταν ο προς απόδειξη τύπος είναι συνεπαγωγή. Με την χρήση του μπορούμε να μεταφέρουμε την υπόθεση της συνεπαγωγής στις υποθέσεις μας και έτσι να αποκτήσουμε περισσότερα «εργαλεία» για να ολοκληρώσουμε την τυπική μας απόδειξη.
- **Παράδειγμα**. Να δειχθεί ότι $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \psi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$.

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι $\{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi), \psi, \varphi\} \vdash \chi$.

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$	**Υπόθεση**
2. ψ	**Υπόθεση**
3. φ	**Υπόθεση**
4. $\psi \rightarrow \chi$	**1,3 MP**
5. χ	**2,4 MP**

Μεταθεωρήματα (συνέχεια…)

- Το **Θεώρημα Αντιθετοαναστροφής** μπορεί να μας βοηθήσει όταν ο προς απόδειξη τύπος έχει άρνηση στην αρχή του.
- **Παράδειγμα**. Να δειχθεί ότι ο τύπος $\varphi \to \neg\neg\varphi$ είναι τυπικό θεώρημα. Δηλαδή ότι $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

  Εφαρμόζοντας το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι

$$\varphi \vdash \neg\neg\varphi$$

  Εφαρμόζοντας το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\neg\varphi \vdash \neg\varphi$$

  Οπότε η ζητούμενη απόδειξη αποτελείται από ένα μόνο βήμα και είναι:

1.	$\neg\varphi$	**Υπόθεση**

Μεταθεωρήματα (συνέχεια…)

- Εναλλακτικά, όταν ο προς απόδειξη τύπος αρχίζει με άρνηση μπορεί να εφαρμόσουμε το **Θεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο**.
- **Παράδειγμα**. Να δειχθεί ότι $\{\varphi \rightarrow \psi, \chi \rightarrow \neg\psi\} \vdash \varphi \rightarrow \neg\chi$

Από το θεώρημα Απαγωγής αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \chi \rightarrow \neg\psi, \varphi\} \vdash \neg\chi$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Απαγωγής σε Άτοπο, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\{\varphi \rightarrow \psi, \chi \rightarrow \neg\psi, \varphi, \chi\}$ είναι αντιφατικό.

1. $\varphi \rightarrow \psi$	**Υπόθεση**
2. $\chi \rightarrow \neg\psi$	**Υπόθεση**
3. φ	**Υπόθεση**
4. χ	**Υπόθεση**
5. ψ	**1,3 MP**
6. $\neg\psi$	**2,4 MP**

Αντίφαση!

Πληρότητα - Εγκυρότητα

- Η **σημασιολογική** και η **συντακτική** προσέγγιση αποδεικνύονται τελικά ισοδύναμες για την ΠΛ, χάρη στα δύο παρακάτω θεμελιώδη θεωρήματα.

- **Θεώρημα Πληρότητας ΠΛ**. Για κάθε σύνολο τύπων Τ και κάθε τύπο φ, ισχύει:

  αν $T \vDash \varphi$, τότε $T \vdash \varphi$

- **Θεώρημα Εγκυρότητας ΠΛ**. Για κάθε σύνολο τύπων Τ και κάθε τύπο φ, ισχύει:

  αν $T \vdash \varphi$, τότε $T \vDash \varphi$

- Εμπειρικά, η ερμηνεία των δύο θεωρημάτων στο πλαίσιο της ΠΛ, είναι:
  - Ότι είναι αληθές μπορεί να αποδειχθεί (πληρότητα)
  - Ότι μπορεί να αποδειχθεί είναι αληθές (εγκυρότητα)

Πληρότητα – Εγκυρότητα (συνέχεια…)