Ασκήσεις Προτασιακής Λογικής
Συντακτική Προσέγγιση
Εγκυρότητα-Πληρότητα

1) Ποιες από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές και ποιες όχι:
   i) Το $\psi \vdash (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \theta$, προκύπτει από το $\{\psi, \varphi, \chi)\} \vdash \theta$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Απαγωγής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
   ii) Το $\{\varphi, \psi\} \vdash \neg\neg\psi$, προκύπτει από το $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \neg\varphi$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
   iii) Το $\varphi \vdash \psi \rightarrow \neg\chi$, προκύπτει από το $\{\psi, \chi\} \vdash \neg\varphi$, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Απαγωγής και Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.
   iv) Το $\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \chi$, προκύπτει από το $\{\varphi, \neg\chi\} \vdash \psi$, χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Απαγωγής και Αντιθετοαναστροφής μία ή περισσότερες φορές το καθένα.

2) Χαρακτηρίστε τις παρακάτω δηλώσεις ως Σωστές ή Λάθος;
   i) Ο τύπος $(\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi) \rightarrow ((\neg\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\varphi)$ προκύπτει από το ΑΣ3 με κάποια συντακτική αντικατάσταση.
   ii) Ο τύπος $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$ προκύπτει από το ΑΣ2 με κάποια συντακτική αντικατάσταση.
   iii) Με την εφαρμογή του θεωρήματος Αντιθετοαναστροφής, προκύπτει ότι αν $\varphi \vdash \psi$, τότε $\neg\psi \vdash \neg\varphi$.
   iv) Αν το σύνολο $\{\varphi, \psi\}$ είναι αντιφατικό τότε ο τύπος $\varphi \rightarrow \neg\psi$ είναι τυπικό θεώρημα.

3) Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω **τυπική απόδειξη**:

1. ………………	**Υπόθεση**
2. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow [\chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)]$	**ΑΣ1**, όπου θέσαμε στη θέση του φ τον τύπο $(\varphi \rightarrow \psi)$ και όπου ψ τον τύπο χ.
3. ………………	1,2 **MP**

4. ………………	**ΑΣ2**, όπου θέσαμε στη θέση του φ τον τύπο …. , όπου ψ τον τύπο .... και όπου χ τον τύπο …..
5. $(\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)$	3,4 **MP**

4) Συμπληρώστε τις επεξηγήσεις των βημάτων στην παρακάτω **τυπική απόδειξη** του $\{ \varphi \to \chi , \chi \to \neg\psi \} \vdash \varphi \to \neg\psi$:

1. $\varphi \to \chi$	……………………
2. $\chi \to \neg\psi$	……………………
3. $(\chi \to \neg\psi) \to (\varphi \to (\chi \to \neg\psi))$	……………………
4. $\varphi \to (\chi \to \neg\psi)$	……………………
5. $(\varphi \to (\chi \to \neg\psi)) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \neg\psi))$	……………………
6. $(\varphi \to \chi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	……………………
7. $\varphi \to \neg\psi$	……………………

5) Συμπληρώστε τα κενά στην παρακάτω **τυπική απόδειξη**:

1. ……………………	Υπόθεση
2. ……………………	Υπόθεση
3. ……………………	**ΑΣ1**, αντικαθιστώντας όπου φ τον τύπο ...... και όπου ψ τον τύπο ....
4. $\neg\varphi \to (\chi \to \neg\psi)$	**2,3 MP**
5. ……………………	**ΑΣ2**, αντικαθιστώντας όπου φ τον τύπο ......, όπου ψ τον τύπο ...... και όπου χ τον τύπο ....
6. ……………………	**4,5 MP**
7. $\neg\varphi \to \neg\psi$	**1,6 MP**
8. ……………………	**ΑΣ3**, αντικαθιστώντας όπου φ τον τύπο ...... και όπου ψ τον τύπο…...

9.	......……………………	7,8 MP

(Υπόδειξη: Στις παραπάνω ασκήσεις σκεφτείτε τι τύπος πρέπει να μπει σε κάποιο κενό βλέποντας το αποτέλεσμα που έχει η χρήση του κανόνα modus ponens *σε κάποιο μεταγενέστερο βήμα.)*

6) Επαναλάβατε την τυπική απόδειξη του (4) με χρήση του θεωρήματος Απαγωγής.

7) Να αποδείξετε ότι $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \neg\chi) \to (\chi \to \neg(\varphi \to \psi))$.

8) (α) Δείξτε ότι $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) \;\vdash\; (\varphi \to \psi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$

   (β) Βασιζόμενοι στο (α) δείξτε ότι ο τύπος $((\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)) \to ((\varphi \to \psi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi))$ είναι ταυτολογία.

9) Στις παρακάτω προτάσεις το Τ είναι σύνολο προτασιακών τύπων ενώ το φ είναι τύπος. Ποιες από τις προτάσεις αληθεύουν;
   i) Αν $T \vdash \varphi$, τότε το σύνολο $T \cup \{\neg \varphi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.
   ii) Κάθε τυπική απόδειξη του προτασιακού λογισμού περιλαμβάνει πεπερασμένο αριθμό από βήματα.
   iii) Αν το T δεν είναι συνεπές και ο φ αντίφαση, τότε $T \vdash \varphi$
   iv) Αν το T είναι συνεπές και ο φ ταυτολογία, τότε $T \vdash \varphi$

10) Έστω φ και ψ τύποι, έστω T σύνολο τύπων. Δείξτε ότι οι δύο παρακάτω δηλώσεις (i) και (ii) είναι ισοδύναμες: (i) $T \vdash \varphi \to \psi$, (ii) $T \cup \{\varphi, \neg\psi\}$ μη ικανοποιήσιμο.

11) **(α)** Χρησιμοποιώντας μόνο τα αξιωματικά σχήματα ΑΣ1-3 (δηλαδή να μην χρησιμοποιηθούν τα Θ. Απαγωγής είτε Αντιθετοαντιστροφής), τις υποθέσεις και τον αποδεικτικό κανόνα Modus Ponens, να δείξετε ότι:
   i) $\{ \varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$
   ii) $\{ \varphi \to (\psi \to \chi), \psi\} \vdash \varphi \to \chi$

   (β) Χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα θεωρήματα Απαγωγής, Αντιθετοαναστροφής, Απαγωγής σε Άτοπο ή συνδυασμό τους, να αποδειχθεί το παρακάτω:

$$\{\chi \to \neg\psi, \varphi\} \vdash \chi \to \neg(\varphi \to \psi)$$

(γ) Αν T είναι ένα σύνολο προτασιακών και φ είναι ένας οποιοσδήποτε προτασιακός τύπος, να αποδειχθεί ότι:

Αν το T U$\{\neg\varphi\}$ είναι αντιφατικό, τότε T |- φ

12) Έστω Τ ένα αντιφατικό σύνολο τύπων και φ *οποιοσδήποτε* τύπος. Δείξτε ότι Τ|-φ.

13) Ποιές από τις παρακάτω δηλώσεις είναι σωστές;

i. Αν T σύνολο τύπων, τότε το T είναι συνεπές αν και μόνο αν υπάρχει τύπος φ που δεν αποδεικνύεται τυπικά από το T.
ii. Αν T συνεπές σύνολο τύπων και $T \vdash \varphi$, τότε ο φ είναι ταυτολογία.
iii. Αν T συνεπές σύνολο τύπων και ο τύπος φ είναι ταυτολογία, τότε το $T \cup \{\varphi\}$ είναι ικανοποιήσιμο (επαληθεύσιμο).
iv. Αν το $\{\varphi, \psi\}$ είναι ικανοποιήσιμο τότε το $\{\neg\varphi, \neg\psi\}$ δεν είναι ικανοποιήσιμο.

14) Έστω $\psi_i, i = 1,\ldots,n$, $\chi_j, j = 1,\ldots,m$ και φ τύποι του προτασιακού λογισμού.

i) Δείξτε ότι αν $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\} \models \varphi \to (\chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m)$ και $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\} \models \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m \vee \varphi$, τότε $\{\psi_1,\ldots,\psi_n\} \models \chi_1 \vee \ldots \vee \chi_m$

ii) Δείξτε χρησιμοποιώντας το (i) ότι αν $\{\psi, \varphi\}$ |- χ και $\{\psi\}$ |- $\chi \vee \varphi$, τότε $\{\psi\}$ |- χ .

15) Να δειχθεί ότι $\{\varphi \to (\psi \to \chi), (\varphi \to \psi) \to \varphi\} \vdash_{\Pi\Lambda} (\varphi \to \psi) \to \chi$

α) Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής.

β) Χωρίς να γίνει χρήση του Θεωρήματος Απαγωγής.

16) Έστω μια ακολουθία τύπων ψ_n, της μορφής $\psi_0 = (\varphi \to \varphi)$ και $\psi_n = (\varphi \to \psi_{n-1})$ για $n > 0$ και τυχόντα τύπο φ. Αποδείξτε επαγωγικά, ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ο τύπος ψ_n είναι τυπικό θεώρημα.

17) Δείξτε χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας ότι για κάθε Τ, Τ συνεπές ανν Τ ικανοποιήσιμο. Είναι το $\{p_1 \to \neg p_2 \wedge p_3,\ p_1 \to (p_3 \to \neg p_2), p_1 \leftrightarrow \neg p_2\}$ συνεπές ;

18) Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα Εγκυρότητας και Πληρότητας της ΠΛ, δείξτε ότι αν Τ|= φ (όπου φ τύπος και Τ άπειρο σύνολο από τύπους) τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο T_0 του Τ τέτοιο που T_0|= φ.

19) Εξηγήστε πως μπορείτε αλγοριθμικά να ελέγξετε αν Τ |- φ όπου Τ σύνολο τύπων και φ ένας τύπος.

20) Δώστε τις παρακάτω τυπικές αποδείξεις. Χρησιμοποιήστε ελεύθερα όλα τα σχετικά θεωρήματα εκτός από το θεώρημα Πληρότητας.

i. $\vdash (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\varphi_3 \to \cdots (\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \varphi_1) \cdots)$
(όπου δεξιές παρενθέσεις υπάρχουν μόνο στο τέλος και είναι *n* στο πλήθος)

ii. $\{(p_i \to p_{i+1}) \colon i \in \mathbf{N}\} \cup \{\neg p_5\} \vdash \neg p_2$ (θεωρήσατε γνωστό ότι $\vdash (\varphi \to \neg\neg\varphi)$)

iii. $\{ (\varphi \to \psi), (\varphi \to \neg\psi) \} \vdash \neg\varphi$

21) Δείξτε ότι οι παρακάτω υποδηλούμενες τυπικές αποδείξεις δεν υπάρχουν. Επιτρέπεται να χρησιμοποιήσετε τα θεωρήματα Πληρότητας / Εγκυρότητας.

i. $\vdash ((\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\chi \to \psi)$

ii. $\{ (p_i \to p_{i+1}) \colon i \in \mathbf{N} \} \vdash (p_4 \to p_2)$