Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

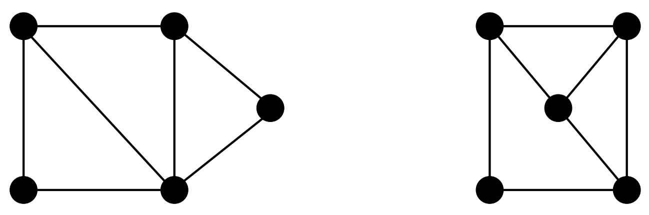
Διαδρομές – Συνεκτικότητα - Κύκλοι Euler – Κύκλοι Hamilton

1) Έστω G γράφημα με 3 συνεκτικές συνιστώσες G_1, G_2, G_3 με πλήθος κορυφών αντίστοιχα n_1, n_2, n_3 και πλήθος ακμών αντίστοιχα m_1, m_2, m_3. Ενώνουμε κάθε κορυφή του G με όλες τις κορυφές στις άλλες συνεκτικές συνιστώσες. Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το γράφημα που προκύπτει;

2) Έστω e μια ακμή που εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών σε ένα κλειστό περίπατο W. Δείξτε ότι ο W περιλαμβάνει έναν κύκλο που περιλαμβάνει την e.

3) Έστω G=(V,E) ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές, έτσι ώστε ο βαθμός $\delta(v)$ κάθε κορυφής $v \in V$ να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του $(n-1)/2$. Δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό.

4) (i) Το παρακάτω γράφημα αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες. Καταγράψτε την ακολουθία βαθμών των κορυφών του γραφήματος. Στην συνέχεια δώστε ένα άλλο συνεκτικό γράφημα με την ίδια ακολουθία βαθμών.



(ii) Έστω G ένα γράφημα με ελάχιστο βαθμό κορυφής 2. Αφού δείξετε ότι το G έχει μία τουλάχιστον ακμή που δεν είναι γέφυρα, δείξτε στην συνέχεια ότι υπάρχει συνεκτικό γράφημα με την ίδια ακολουθία βαθμών όπως το G.

5) Αποδείξτε ή διαψεύστε: Αν το G είναι γράφημα Euler στο οποίο οι ακμές x και y έχουν κοινό άκρο, τότε το G έχει κύκλο Euler στον οποίο οι x και y εμφανίζονται διαδοχικές.

6) Κατασκευάζουμε ένα γράφημα G ως ακολούθως. Έχουμε ένα σύνολο A m κορυφών και ένα άλλο B (ξένο προς το A) n κορυφών. Ενώνουμε κάθε κορυφή του A με όλες τις κορυφές του B. (Θα δούμε ότι ένα τέτοιο γράφημα λέγεται *πλήρες διμερές* γράφημα και συμβολίζεται με $K_{m,n}$.) Προσδιορίστε τα m και n ώστε το G να έχει κύκλο Euler.

7) Έστω G ένα συνδεόμενο (συνεκτικό) μη κατευθυνόμενο γράφημα. Θεωρούμε ότι οι ακμές του γραφήματος παριστούν τους δρόμους μιας πόλης. Ένας τουρίστας θέλει να κάνει τον γύρο της πόλης έτσι ώστε να περπατήσει τα δύο πεζοδρόμια κάθε δρόμου ακριβώς μία φορά. Αποδείξτε ότι αυτό είναι πάντα δυνατό για κάθε πόλη.

8) Κατασκευάζουμε ένα γράφημα G ως ακολούθως. Κάθε κορυφή του έχει μία ετικέτα που είναι μία δυαδική συμβολοσειρά μήκους k (επειδή υπάρχουν 2^k τέτοιες συμβολοσειρές, το G έχει 2^k κορυφές). Ενώνουμε με ακμή δύο κορυφές αν οι ετικέτες τους διαφέρουν σε ακριβώς δύο θέσεις. Πόσες συνεκτικές συνιστώσες έχει το G;

9) Έστω απλό συνδεόμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές και ελάχιστο βαθμό κορυφής k, $2 \leq k \leq n-1$. Να δείξετε ότι το G περιέχει (απλό) μονοπάτι μήκους τουλάχιστον k και (απλό) κύκλο μήκους τουλάχιστον k+1.

10) Έστω απλό συνδεόμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές. Συμβολίζουμε με $d(v)$ τον βαθμό κάθε κορυφής v. Έστω κορυφές u και v τέτοιες ώστε το συντομότερο $u - v$ μονοπάτι έχει μήκος $k \geq 3$. Να δείξετε ότι $d(u) + d(v) \leq n - k + 1$.

11)
  i) Εχει το $K_{5,6}$ κύκλο Hamilton;
  ii) Έχει το $K_{6,7}$ μονοπάτι Hamilton; (Το μονοπάτι Hamilton είναι ένα απλό μονοπάτι που συμπεριλαμβάνει όλους τους κόμβους ενός γραφήματος ακριβώς μία φορά)
  iii) Διατυπώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός κύκλου Hamilton στο πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$.
  iv) Διατυπώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός μονοπατιού Hamilton στο πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$

12) Ένα *τριμερές γράφημα* είναι ένα γράφημα στο οποίο οι κόμβοι του διαμερίζονται σε τρία σύνολα ανεξαρτησίας. Το $K_{m,n,k}$ είναι το τριμερές γράφημα στο οποίο τα τρία σύνολα ανεξαρτησίας έστω A,B

και Γ έχουν αντίστοιχα m,n και k κορυφές και στο οποίο κάθε κορυφή σε κάθε σύνολο από τα Α, Β και Γ είναι συνδεδεμένη με όλες τις άλλες κορυφές στα άλλα δύο σύνολα.

i) Δείξτε ότι το $K_{2,4,6}$ είναι Hamiltonian.

ii) Δείξτε ότι το $K_{n,2n,3n}$ είναι Hamiltonian για κάθε θετικό ακέραιο n.

13) Να δείξετε ότι κάθε απλό μη-κατευθυντικό γράφημα με 21 κορυφές και 208 ακμές έχει κύκλο Hamilton αλλά δεν έχει κύκλο Euler.
Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθη πρόταση, που είναι γνωστή σαν *Θεώρημα του Dirac*: Έστω G(V, E) απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με *n* κορυφές. Αν όλες οι κορυφές του G έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του *n* / 2, το G έχει κύκλο Hamilton.

14) Να δείξετε ότι υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε n-2 ακμές από το K_n ($n \geq 3$) ώστε το γράφημα που προκύπτει να μην έχει κύκλο Hamilton.

15) Να δείξετε ότι υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε n(n-3)/2 ακμές από το K_n ($n \geq 3$) ώστε το γράφημα που προκύπτει να έχει κύκλο Hamilton.