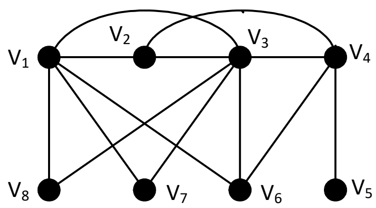
Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

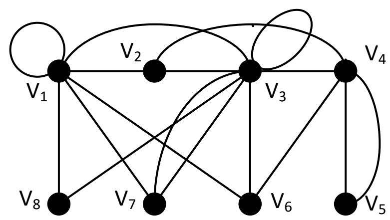
Ορισμοί – Βασικές Έννοιες – Βαθμοί Κορυφών

1) Στο παρακάτω γράφημα βρείτε:
   i) Το $\delta(G)$
   ii) Το $\Delta(G)$
   iii) Την ακολουθία των βαθμών κορυφών του γραφήματος
   iv) Τον μέσο βαθμό των κορυφών

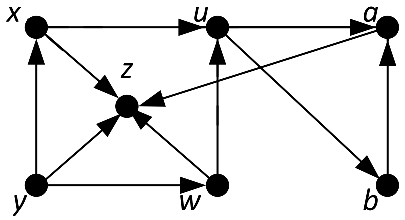


2) Στο γράφημα του ερωτήματος 1 επιβεβαιώστε την ισχύ του Λήμματος της Χειραψίας.

3) Επαναλάβετε τα ερωτήματα 1 και 2 για το παρακάτω γράφημα.



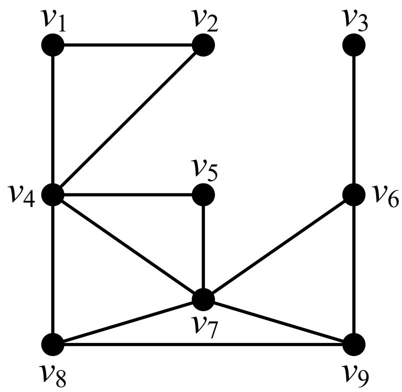
4) Υπολογίστε τους έσω και έξω-βαθμούς των κορυφών του παρακάτω κατευθυντικού γραφήματος. Στην συνέχεια επιβεβαιώστε την ισχύ του Λήμματος της Χειραψίας για κατευθυντικά γραφήματα.



5) Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι γραφικές. Αν είναι σχεδιάστε το αντίστοιχο απλό γράφημα. Αν όχι, αποδείξτε το.
   i) (5,5,4,3,2,2,2,1)
   ii) (5,5,4,4,2,2,1,1)

iii) (5,5,5,3,2,2,1,1)
iv) (5,5,5,4,2,1,1,1)

6) Για το γράφημα G του σχήματος να βρείτε:
   i) Ένα συνεκτικό υπογράφημα με 6 κορυφές που δεν έχει κύκλους.
   ii) Το επαγόμενο υπογράφημα με σύνολο κορυφών $\{v_1, v_2, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$.



7) Υπάρχουν απλά γραφήματα με τα παρακάτω χαρακτηριστικά;
   i) Γράφημα 6 κορυφών, εκ των οποίων 3 έχουν βαθμό 3 και 3 έχουν βαθμό 4.
   ii) Γράφημα 7 κορυφών, εκ των οποίων 1 έχει βαθμό 1, 3 έχουν βαθμό 3, 1 έχει βαθμό 4, και 2 έχουν βαθμό 6.

8) Για το γράφημα G του ερωτήματος 6, βρείτε τα γραφήματα (i) $G\text{-}v_4v_5$, (ii) $G\text{-}v_7$, (iii) $G\cdot v_8v_7$.

9) Σε μια τάξη 9 φοιτητών, κάθε φοιτητής συμπαθεί 3 άλλους. Πείτε αν είναι δυνατόν κάθε φοιτητής να συμπαθιέται από τους 3 φοιτητές τους οποίους συμπαθεί.

   Υπόδειξη: Σκεφτείτε ένα κατάλληλο γράφημα το οποίο αν ήταν εφικτό να υπάρχει θα μοντελοποιούσε την παραπάνω κατάσταση.

10) Δείξτε ότι ένα απλό γράφημα έχει τουλάχιστον δύο κορυφές ίδιου βαθμού. Ισχύει το ίδιο σε γράφημα με παράλληλες ακμές αλλά όχι ανακυκλώσεις;

11) Δίνεται ένα γράφημα G το οποίο έχει προέλθει από την αφαίρεση μιας κορυφής από ένα κανονικό γράφημα H με τουλάχιστον 3 κορυφές και με παράλληλες ακμές (ίσως) αλλά όχι ανακυκλώσεις. Πώς θα μπορούσατε να ανακατασκευάσετε το H από το G;

12) Ο υπερκύβος Q_n διάστασης n είναι ένα γράφημα που κάθε κορυφή του έχει μία ετικέτα n δυαδικών ψηφίων και το οποίο κατασκευάζεται αναδρομικά ως εξής:

i) Για n=0 είναι μία κορυφή και η ετικέτα του είναι κενή.

ii) Για n>1 ο υπερκύβος Q_n διάστασης n κατασκευάζεται από δύο αντίγραφα του κύβου Q_{n-1} διάστασης n-1 με τον εξής τρόπο: ενώνουμε τις κορυφές με ίδια ετικέτα από κάθε αντίγραφο και δίνουμε σε κάθε κορυφή του κύβου διάστασης n μία ετικέτα που προκύπτει από την ετικέτα n-1 ψηφίων που είχε με ένα επιπλέον «0» στην αρχή αν ανήκε στο πρώτο αντίγραφο Q_{n-1} και «1» αν ανήκε στο δεύτερο αντίγραφο.

α) Σχεδιάστε τους υπερκύβους Q_n για $0 \leq n \leq 4$.

β) Υπολογίστε το πλήθος των κορυφών του υπερκύβου Q_n.

γ) Δείξτε ότι το Q_n είναι κανονικό γράφημα και υπολογίστε τον βαθμό κάθε κορυφής

δ) Υπολογίστε το πλήθος των ακμών του Q_n.

ε) Δείξτε ότι η ετικέτα κάθε κορυφής διαφέρει σε ένα μόνο ψηφίο από την ετικέτα κάθε γειτονικής κορυφής.

13) Θεωρούμε απλό μη κατευθυντικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές, και για κάθε κορυφή u, συμβολίζουμε με $\mathrm{d}(u)$ τον βαθμό της u στο G, και με G_u το γράφημα που προκύπτει από το G αν αφαιρέσουμε την u και όλες τις ακμές που προσπίπτουν σε αυτή.

i) Να δείξετε ότι αν το G δεν περιέχει τρίγωνο (κύκλο μήκους 3), τότε υπάρχουν κορυφές u, v με $\deg(u) + \deg(v) \leq n$.

ii) Να δείξετε ότι αν το G έχει περισσότερες από $n^2 / 4$ ακμές και δεν περιέχει τρίγωνο, τότε υπάρχει κορυφή u τέτοια ώστε το G_u να περιέχει *περισσότερες* από $(n-1)^2 / 4$ ακμές.

Υπόδειξη: Ισχύει ότι για κάθε φυσικό m, αν $m > n^2 / 4$, τότε και $m - n/2 > (n-1)^2 / 4$. Μπορείτε να το χρησιμοποιήσετε, αφού βέβαια πρώτα το αποδείξετε! Ξεχωρίστε περιπτώσεις όπου το n είναι άρτιο ή περιττό.

iii) Χρησιμοποιώντας το (ii) και μαθηματική επαγωγή, να δείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυντικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και περισσότερες από $n^2 / 4$ ακμές περιέχει τρίγωνο.

14) Σε ένα απλό μη κατευθυντικό γράφημα G 10 κορυφών, διάφορο του K_{10} βάζουμε αυθαίρετη κατεύθυνση στις ακμές του (στην ορολογία της θεωρίας γραφημάτων αυτό λέγεται *προσανατολισμός του* G), έτσι ώστε να προκύψει ένα κατευθυντικό γράφημα G'. Δείξτε ότι δεν

μπορούν όλοι οι έξω-βαθμοί των κορυφών του *G'* να είναι διαφορετικοί.

15) Ένα *πρωτάθλημα* (*tournament*) n κορυφών είναι ένα κατευθυντικό γράφημα n κορυφών με ακριβώς μία (κατευθυντική) ακμή μεταξύ κάθε ζευγαριού κορυφών. (Ο όρος οφείλεται στο ότι μοντελοποιεί τα αποτελέσματα ενός πρωταθλήματος στο οποίο συμμετέχουν οι n ομάδες, κάθε ομάδα παίζει έναν αγώνα με κάθε άλλη και η φορά της ακμής δείχνει την νικήτρια ομάδα, π.χ. η ομάδα από όπου ξεκινά η ακμή νίκησε την ομάδα όπου καταλήγει.) Δείξτε ότι υπάρχει ένα πρωτάθλημα n κορυφών όπου ο έσω βαθμός κάθε κορυφής είναι ίσος με τον έξω βαθμό της αν-ν το n είναι περιττό.

16) Δείξτε ότι είναι δυνατόν ένα πρωτάθλημα να μην έχει καθαρό νικητή, δηλαδή να υπάρχουν περισσότερες της μίας κορυφής με μέγιστο έξω-βαθμό. (Σχεδιάστε ένα πρωτάθλημα 5 κορυφών με αυτή την ιδιότητα, σαν αντιπαράδειγμα.)

17) Δείξτε ότι ένα πρωτάθλημα αν και μπορεί να μην έχει πάντα νικητή (προηγούμενη άσκηση) έχει πάντα έναν «Βασιλιά», δηλαδή μια κορυφή x που για κάθε άλλη y είτε νίκησε η x την y είτε νίκησε η x μια κορυφή z που νίκησε την y. Δηλαδή σε όρους γραφημάτων υπάρχει πάντα μια κορυφή x που για κάθε άλλη y είτε υπάρχει η ακμή x→ y είτε υπάρχει μια κορυφή z έτσι ώστε να υπάρχουν οι ακμές x→z και z→y.