# Ασκήσεις Θεωρίας Γραφημάτων

# Διαδρομές – Συνεκτικότητα - Κύκλοι Euler – Κύκλοι Hamilton

1) Έστω $G$ γράφημα με 3 συνεκτικές συνιστώσες $G_1$, $G_2$, $G_3$ με πλήθος κορυφών αντίστοιχα $n_1$, $n_2$, $n_3$ και πλήθος ακμών αντίστοιχα $m_1$, $m_2$, $m_3$. Ενώνουμε κάθε κορυφή του $G$ με όλες τις κορυφές στις άλλες συνεκτικές συνιστώσες. Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το γράφημα που προκύπτει;

   **Απάντηση**

   Οι κορυφές είναι προφανώς $n_1+n_2+n_3$. Όταν ενώνουμε τις κορυφές τις $G_1$ με τις κορυφές των άλλων συνεκτικών συνιστωσών, προσθέτουμε ακόμη $n_1(n_2+n_3)$ ακμές. Αντίστοιχα όταν ενώσουμε τις κορυφές της $G_2$ με τις κορυφές της $G_3$ προσθέτουμε $n_2n_3$ ακμές. Συνολικά λοιπόν οι ακμές του γραφήματος που προκύπτει είναι $m_1+m_2+m_3+n_1(n_2+n_3)+n_2n_3$.

2) Έστω e μια ακμή που εμφανίζεται περιττό αριθμό φορών σε ένα κλειστό περίπατο W. Δείξτε ότι ο W περιλαμβάνει έναν κύκλο που περιλαμβάνει την e.

   **Απάντηση**

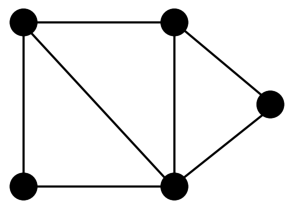
   Η απόδειξη είναι προσαρμογή της απόδειξης στις διαφάνειες για την ύπαρξη κύκλου σε μία κλειστή διαδρομή περιττού μήκους.

3) Έστω G=(V,E) ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κορυφές, έτσι ώστε ο βαθμός δ(v) κάθε κορυφής $v \in V$ να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του (n-1)/2. Δείξτε ότι το G είναι συνεκτικό.

   **Απάντηση**

   Έστω ότι το G δεν είναι συνεκτικό. Τότε κάθε συνεκτική συνιστώσα του πρέπει να έχει τουλάχιστον (n-1)/2+1=(n+1)/2 κορυφές. Συνεπώς οι κορυφές του γραφήματος πρέπει να είναι τουλάχιστον n+1, άτοπο.

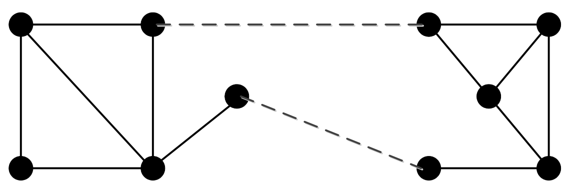
4) (i) Το παρακάτω γράφημα αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες. Καταγράψτε την ακολουθία βαθμών των κορυφών του γραφήματος. Στην συνέχεια δώστε ένα άλλο συνεκτικό γράφημα με την ίδια ακολουθία βαθμών.



(ii) Έστω $G$ ένα γράφημα με ελάχιστο βαθμό κορυφής 2. Αφού δείξετε ότι το $G$ έχει μία τουλάχιστον ακμή που δεν είναι γέφυρα, δείξτε στην συνέχεια ότι υπάρχει συνεκτικό γράφημα με την ίδια ακολουθία βαθμών όπως το $G$.

**Απάντηση**

Η ακολουθία βαθμών είναι η 4,3,3,3,3,3,3,2,2,2. Παρακάτω φαίνεται ένα συνεκτικό γράφημα με την ίδια ακολουθία βαθμών. Έχει προέλθει από το δοθέν με την αφαίρεση δύο ακμών του, μία από κάθε συνιστώσα, και την ένωση ανά δύο των κορυφών των δύο συνιστωσών με νέες ακμές (τις διακεκομμένες).



(ii) Η παραπάνω ιδέα χρησιμοποιείται και σε αυτό το ερώτημα. Εν πρώτοις, επειδή ο ελάχιστος βαθμός των κορυφών του γραφήματος είναι 2, κάθε συνιστώσα του δεν μπορεί να είναι δένδρο διότι κάθε δένδρο έχει τουλάχιστον ένα φύλλο. Κατά συνέπεια κάθε συνιστώσα του $G$ έχει τουλάχιστον μία ακμή που δεν είναι γέφυρα γιατί αλλιώς η συνιστώσα θα ήταν δένδρο. Έστω λοιπόν δύο συνιστώσες του $G$ και έστω δύο ακμές μη-γέφυρες, η $e_1 = (x_1, y_1)$ στην μία συνιστώσα και η $e_2 = (x_2, y_2)$ στην άλλη. Αφαιρούμε τις ακμές αυτές και προσθέτουμε τις $(x_1, x_2)$ και $(y_1, y_2)$. Επειδή οι ακμές που αφαιρέσαμε δεν ήταν γέφυρες, δεν χάλασε η συνεκτικότητα των δύο συνιστωσών. Επίσης σε κάθε μία από τις 4 κορυφές αφαιρέσαμε μία ακμή αλλά προσθέσαμε μία άλλη. Συνεπώς δεν άλλαξε ο βαθμός τους. Έχουμε λοιπόν δημιουργήσει μία συνιστώσα με ακολουθία βαθμών ίδια με των δύο αρχικών συνιστωσών. Αν συνεπώς το $G$ έχει $k$ συνεκτικές συνιστώσες υποθέτουμε επαγωγικά ότι αντικαθιστούμε τις $k$-1 με μία συνεκτική συνιστώσα με ίδια ακολουθία βαθμών όπως οι $k$-1. Το γράφημα που κατασκευάστηκε έχει δύο συνιστώσες. Εφαρμόζουμε τώρα την παραπάνω διαδικασία σε αυτές τις συνιστώσες και έχουμε ένα συνεκτικό γράφημα με ίδια ακολουθία βαθμών όπως το αρχικό.

5) Αποδείξτε ή διαψεύστε: Αν το G είναι γράφημα Euler στο οποίο οι ακμές x και y έχουν κοινό άκρο, τότε το G έχει κύκλο Euler στον οποίο οι x και y εμφανίζονται διαδοχικές.

**Απάντηση**

Αληθές. Έστω x=uv και y=vw. Αν ο βαθμός της v είναι 2, τότε δεν υπάρχει άλλος τρόπος για έναν κύκλο Euler παρά να επισκεφτεί τις x και y διαδοχικά. Αν όχι, τότε αφαιρούμε τις ακμές x και y και προσθέτουμε μία νέα κορυφή z που την ενώνουμε με τις κορυφές u και w. Στο προκύπτον γράφημα G' υπάρχει κύκλος Euler που διασχίζει τις uz και zw διαδοχικά. Αυτός ο κύκλος Euler μετατρέπεται σε κύκλο Euler στο G που διασχίζει τις x και y διαδοχικά.

6) Κατασκευάζουμε ένα γράφημα *G* ως ακολούθως. Έχουμε ένα σύνολο A m κορυφών και ένα άλλο B (ξένο προς το A) n κορυφών. Ενώνουμε κάθε κορυφή του A με όλες τις κορυφές του B. (Θα δούμε ότι ένα τέτοιο γράφημα λέγεται *πλήρες διμερές* γράφημα και συμβολίζεται με $K_{m,n}$.) Προσδιορίστε τα m και n ώστε το *G* να έχει κύκλο Euler.

**Απάντηση**

Οι κορυφές του συνόλου A έχουν βαθμό n και του B βαθμό m. Από το Θεώρημα Euler τα m και n πρέπει να είναι άρτιοι αριθμοί.

7) Έστω G ένα συνδεόμενο (συνεκτικό) μη κατευθυνόμενο γράφημα. Θεωρούμε ότι οι ακμές του γραφήματος παριστούν τους δρόμους μιας πόλης. Ένας τουρίστας θέλει να κάνει τον γύρο της πόλης έτσι ώστε να περπατήσει τα δύο πεζοδρόμια κάθε δρόμου ακριβώς μία φορά. Αποδείξτε ότι αυτό είναι πάντα δυνατό για κάθε πόλη.

**Απάντηση**

Κατασκευάζουμε το γράφημα που παριστάνει την πόλη όπου κάθε δρόμος είναι δύο παράλληλες ακμές (τα δύο πεζοδρόμια). Ο ζητούμενος περίπατος είναι η διάσχιση όλων των πεζοδρομίων ακριβώς μια φορά το κάθε ένα. Αυτό στο γράφημα είναι ένας κύκλος Euler. Όμως το γράφημα που κατασκευάσαμε έχει πάντα κύκλο Euler επειδή κάθε δρόμος δίνει 2 ακμές σε κάθε κορυφή δηλαδή κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό.

8) Κατασκευάζουμε ένα γράφημα $G$ ως ακολούθως. Κάθε κορυφή του έχει μία ετικέτα που είναι μία δυαδική συμβολοσειρά μήκους k (επειδή υπάρχουν $2^k$ τέτοιες συμβολοσειρές, το $G$ έχει $2^k$ κορυφές). Ενώνουμε με ακμή δύο κορυφές αν οι ετικέτες τους διαφέρουν σε ακριβώς δύο θέσεις. Πόσες συνεκτικές συνιστώσες έχει το $G$;

**Απάντηση**

Έστω $\sigma=b_1b_2,\ldots,b_k$ μία δυαδική συμβολοσειρά με $k$ bits που είναι ετικέτα κάποιας κορυφής u του $G$. Μία γειτονική κορυφή v της u έχει ετικέτα $\sigma'$ που διαφέρει σε δύο ακριβώς bits από την $\sigma$, έστω τα $b_i$ και $b_j$. Αν και τα δύο αυτά bits είναι 0, τότε στην $\sigma'$ είναι και τα δύο 1 και το αντίστροφο. Αν ένα μόνο από τα δύο bits είναι 1, πάλι στην συμβολοσειρά της v ένα μόνο από τα δύο θα είναι 1. Συνάγουμε ότι αν η $\sigma$ έχει άρτιο πλήθος 1, η $\sigma'$ έχει επίσης άρτιο πλήθος 1. Το αυτό βεβαίως ισχύει για την ετικέτα κάποιας γειτονικής κορυφής της v. Συνάγουμε ότι σε ένα οποιοδήποτε μονοπάτι με άκρο την v, οι κορυφές έχουν όλες άρτιο πλήθος 1, ή όλες περιττό πλήθος 1. Επομένως υπάρχουν το λιγότερο δύο συνεκτικές συνιστώσες στο $G$, είτε με ετικέτες με άρτιο πλήθος 1, είτε με περιττό πλήθος 1. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν *ακριβώς δύο* συνεκτικές συνιστώσες. Για τον σκοπό αυτό θα δείξουμε ότι για οποιεσδήποτε δύο συμβολοσειρές $\sigma$ και $\sigma'$ με άρτιο πλήθος 1, μπορούμε από την $\sigma$ να φτάσουμε στην $\sigma'$ με διαδοχικές εναλλαγές δυάδων bits. Αυτή η διαδικασία στο γράφημα είναι ισοδύναμη με διάσχιση ενός μονοπατιού με άκρα τις αντίστοιχες κορυφές u και v, που δείχνει ότι οι u και v είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Τώρα το πλήθος των bits έστω $l$, στα οποία οι $\sigma$ και $\sigma'$ διαφέρουν πρέπει να είναι άρτιο, αλλιώς μία από τις συμβολοσειρές πρέπει να έχει περιττό πλήθος bits, άτοπο. Επομένως ξεκινώντας από την $\sigma$ αλλάζουμε διαδοχικά δυάδες bits όπου η $\sigma$ διαφέρει από την $\sigma'$και σε $l/2$ βήματα φτάνουμε στην $\sigma'$. Συνεπώς όλες οι κορυφές με άρτιο πλήθος 1 στις συμβολοσειρές τους βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι όλες οι κορυφές με περιττό πλήθος 1 στις συμβολοσειρές τους βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Άρα το $G$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες.

9) Έστω απλό συνδεόμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ με $n$ κορυφές και ελάχιστο βαθμό κορυφής $k$, $2 \leq k \leq n - 1$. Να δείξετε ότι το $G$ περιέχει (απλό) μονοπάτι μήκους τουλάχιστον $k$ και (απλό) κύκλο μήκους τουλάχιστον $k$+1.

**Απάντηση**

Έστω $p$ ένα μακρύτερο μονοπάτι του γραφήματος και έστω $u$ και $v$ τα δύο άκρα του. Επειδή το $p$ δεν μπορεί να επεκταθεί, όλοι οι $k$ γείτονες της $v$ πρέπει να ανήκουν ήδη στο $p$. Άρα το $p$ περιλαμβάνει τουλάχιστον $k$+1 κορυφές (την $v$ και τις $k$ γειτονικές της), και συνεπώς έχει μήκος τουλάχιστον $k$.

Έστω τώρα $w$ η γειτονική κορυφή της $v$ που βρίσκεται πλησιέστερα προς την $u$ στο $p$ (η $w$ μπορεί να ταυτίζεται με την $u$). Από τον ορισμό της $w$, όλοι οι $k$ γείτονες της $v$ βρίσκονται στο τμήμα του $p$ μεταξύ $w$ και $v$, το οποίο συμβολίζουμε με $p[w, v]$. Άρα το $p[w, v]$ έχει μήκος τουλάχιστον $k$, και αφού $k \geq 2$, περιλαμβάνει τουλάχιστον μία κορυφή μεταξύ των $w$ και $v$. Συνεπώς, το $p[w, v]$ μαζί με την ακμή $\{v, w\}$ αποτελεί έναν (απλό) κύκλο μήκους τουλάχιστον $k$+1.

10) Έστω απλό συνδεόμενο μη κατευθυνόμενο γράφημα $G$ με $n$ κορυφές. Συμβολίζουμε με $d(v)$ τον βαθμό κάθε κορυφής $v$. Έστω κορυφές $u$ και $v$ τέτοιες ώστε το συντομότερο $u - v$ μονοπάτι έχει μήκος $k \geq 3$. Να δείξετε ότι $d(u) + d(v) \leq n - k + 1$.

**Απάντηση**

Έστω $\Gamma(u)$ και $\Gamma(v)$ τα σύνολα των γειτονικών κορυφών των $u$ και $v$. Αφού το συντομότερο $u - v$ μονοπάτι έχει μήκος $k \geq 3$, τα $\Gamma(u)$ και $\Gamma(v)$ είναι ξένα μεταξύ τους και ακόμη $v \notin \Gamma(u)$ και $u \notin \Gamma(v)$. Επιπλέον, το συντομότερο $u - v$ μονοπάτι έχει $(k+1) - 4 = k - 3$ κορυφές που δεν ανήκουν στο σύνολο $\Gamma(u) \cup \Gamma(v) \cup \{u, v\}$. Άρα οι κορυφές του γραφήματος πρέπει να είναι $n \geq 2 + d(u) + d(v) + k - 3$, όπου στον όρο 2 προσμετρούνται οι κορυφές $u$ και $v$, στους όρους $d(u)$ και $d(v)$ οι γειτονικές κορυφές των $u$ και $v$, και στον όρο $k - 3$ οι κορυφές του συντομότερου $u - v$ μονοπατιού που δεν ανήκουν στο σύνολο $\Gamma(u) \cup \Gamma(v) \cup \{u, v\}$. Με απλές αλγεβρικές πράξεις, καταλήγουμε ότι:

$$n \geq 2 + d(u) + d(v) + k - 3 \Leftrightarrow d(u) + d(v) \leq n - k + 1$$

11)

i) Εχει το $K_{5,6}$ κύκλο Hamilton;

ii) Έχει το $K_{6,7}$ μονοπάτι Hamilton; (Το μονοπάτι Hamilton είναι ένα απλό μονοπάτι που συμπεριλαμβάνει όλους τους κόμβους ενός γραφήματος ακριβώς μία φορά)

iii) Διατυπώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός κύκλου Hamilton στο πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$.

iv) Διατυπώστε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ενός μονοπατιού Hamilton στο πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$

**Απάντηση**

(i) Όχι, (ii) Ναι, (iii) m=n (iv) $|m-n| \leq 1$

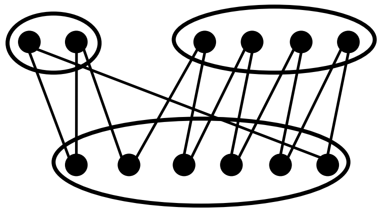
12) Ένα *τριμερές γράφημα* είναι ένα γράφημα στο οποίο οι κόμβοι του διαμερίζονται σε τρία σύνολα ανεξαρτησίας. Το $K_{m,n,k}$ είναι το τριμερές γράφημα στο οποίο τα τρία σύνολα ανεξαρτησίας έστω Α,Β και Γ έχουν αντίστοιχα m,n και k κορυφές και στο οποίο κάθε κορυφή σε κάθε σύνολο από τα Α, Β και Γ είναι συνδεδεμένη με όλες τις άλλες κορυφές στα άλλα δύο σύνολα.

i) Δείξτε ότι το $K_{2,4,6}$ είναι Hamiltonian.

ii) Δείξτε ότι το $K_{n,2n,3n}$ είναι Hamiltonian για κάθε θετικό ακέραιο n.

**Απάντηση**

(i) Το παρακάτω σχήμα δείχνει έναν κύκλο Hamilton (μόνο τις ακμές του συγκεκριμένου κύκλου) στο $K_{2,4,6}$.



(ii) Θα αποδείξουμε τώρα ότι το $K_{n,2n,3n}$ έχει κύκλο Hamilton για κάθε ακέραιο $n \geq 1$. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n$ οι $n$ κορυφές του συνόλου Α, έστω $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ οι $2n$ κορυφές του συνόλου Β, και έστω $g_1, g_2, \ldots, g_{3n}$ οι $3n$ κορυφές του συνόλου Γ. Είναι φανερό ότι η παρακάτω ακολουθία κορυφών αποτελεί έναν απλό κύκλο που διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά, δηλαδή αποτελεί έναν κύκλο Hamilton:

$$a_1 g_1 a_2 g_2 \cdots a_n g_n b_1 g_{n+1} b_2 g_{n+2} \cdots b_{2n-1} g_{3n-1} b_{2n} g_{3n} a_1$$

Με άλλα λόγια βρίσκουμε ένα μονοπάτι που περιλαμβάνει εναλλάξ όλες τις n κορυφές του συνόλου Α με n κορυφές (από τις 3n) του συνόλου Γ. Στην συνέχεια κάνουμε το ίδιο για τις 2n κορυφές του συνόλου Β με τις 2n του Γ που απέμειναν. Τέλος, ενώνουμε τα άκρα των δύο μονοπατιών. Παρατηρείστε ότι πάντα υπάρχει ακμή μεταξύ δύο συνεχόμενων κορυφών στην παραπάνω ακολουθία αφού αυτές ανήκουν σε διαφορετικό μέρος / σύνολο κορυφών και θεωρούμε το πλήρες τριμερές γράφημα.

13) Να δείξετε ότι κάθε απλό μη-κατευθυντικό γράφημα με 21 κορυφές και 208 ακμές έχει κύκλο Hamilton αλλά δεν έχει κύκλο Euler.

*Υπόδειξη:* Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθη πρόταση, που είναι γνωστή σαν *Θεώρημα του Dirac*: Έστω G(V, E) απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα με *n* κορυφές. Αν όλες οι κορυφές του G έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του *n* / 2, το G έχει κύκλο Hamilton.

**Απάντηση**

Το $K_{21}$ έχει ως γνωστόν 21*20/2=210 ακμές. Το δοθέν γράφημα είναι λοιπόν το $K_{21}$ από το οποίο αφαιρέσαμε 2 ακμές. Άρα υπάρχουν 2 τουλάχιστον κορυφές (ίσως και 4 αν οι 2 ακμές δεν έχουν κοινή κορυφή) με βαθμό 20-1=19. Συνεπώς το γράφημα δεν έχει κύκλο Euler. Ο μικρότερος βαθμός που μπορεί να έχει είναι 20-2=18 στην περίπτωση ακριβώς που οι 2 ακμές έχουν κοινή κορυφή. Από το θεώρημα Dirac συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κύκλος Hamilton.

14) Να δείξετε ότι υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε n-2 ακμές από το $K_n$ ($n \geq 3$) ώστε το γράφημα που προκύπτει να μην έχει κύκλο Hamilton.

**Απάντηση**

Κάθε κορυφή στο $K_n$ ($n \geq 3$) έχει βαθμό n-1. Αν συνεπώς αφαιρέσουμε n-2 ακμές που πρόσκεινται σε μία κορυφή, η κορυφή αυτή θα έχει πλέον βαθμό 1 και προφανώς στο προκύπτον γράφημα δεν μπορεί να υπάρχει κύκλος Hamilton.

15) Να δείξετε ότι υπάρχει τρόπος να αφαιρέσουμε n(n-3)/2 ακμές από το $K_n$ ($n \geq 3$) ώστε το γράφημα που προκύπτει να έχει κύκλο Hamilton.

**Απάντηση**

Κρατάμε μόνο τις ακμές οποιουδήποτε κύκλου που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του $K_n$ και αφαιρούμε όλες τις άλλες. Οι ακμές του κύκλου είναι n και συνεπώς αφαιρέσαμε n(n-1)/2-n=n(n-3)//2.