Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις

Το Γενικευμένο Διωνυμικό Θεώρημα

1) Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας 1,0,1,0,1,…;

Απάντηση

Από τον ορισμό της γεννήτριας συνάρτησης μιας ακολουθίας έχουμε:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x^2}$$

2) Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_n = 2^n, n = 0,1,2, \dots$; Ποια της ακολουθίας 0, 0, 0, 0, 1, 2, 4,…; (Η δεύτερη είναι η πρώτη στην οποία έχουν προστεθεί τέσσερα 0 στην αρχή.)

Απάντηση

Οι ακολουθίες της μορφής $\alpha_n = \lambda^n, n = 0,1,2, \dots$ έχουν ΓΣ την $\frac{1}{1-\lambda x}$. Άρα $A(x) = \frac{1}{1-2x}$.

Η δεύτερη ακολουθία έχει προκύψει από την πρώτη με δεξιά ολίσθηση κατά 4 θέσεις. Από τον κανόνα της ολίσθησης δεξιά:

$B(x) = \frac{x^4}{1-2x}$.

3) Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας 4, 5, 6, 7, ….;

Απάντηση

Έστω η ακολουθία $\alpha_n = n, n = 0,1,2, \dots$ Αυτή (βλ. σημειώσεις) έχει ΓΣ την $A(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Η δοθείσα ακολουθία προκύπτει από την α_n με αριστερή ολίσθηση κατά 4 θέσεις. Από τον αντίστοιχο κανόνα έχουμε:

$B(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} - (x + 2x^2 + 3x^3)\right] x^{-4}$.

4) Έστω μια ακολουθία α_0, α_1, α_2, α_3,… με γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $b_n = c\alpha_n + d$ όπου c και d σταθερές.

Απάντηση

Η b_n, n=0,1,2,… μπορεί να γραφεί σαν $b_n=ca_n+d\gamma_n$, n=0,1,2,… όπου η $\gamma_n=1$, n=0,1,2,…. Γνωρίζουμε ότι $\Gamma(x)=\frac{1}{1-x}$. Από την γραμμική ιδιότητα των ΓΣ έχουμε ότι $B(x)=cA(x)+\frac{d}{(1-x)}$.

5) Έστω οι ακολουθίες $\alpha_n=5/2^n$ και $b_n=3^n$, n=0, 1, 2,….Βρείτε τους 5 πρώτους όρους της συνέλιξης των δύο ακολουθιών. Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της συνέλιξης;

Απάντηση

Έστω $\delta_n, n=0,1,2,...$ η συνέλιξη των δύο ακολουθιών. Για τους 5 πρώτους όρους της συνέλιξης (μέχρι και τον δ_4) χρειαζόμαστε τους 5 πρώτους όρους των δύο ακολουθιών. Έχουμε λοιπόν:

$\alpha_0=5,\quad \alpha_1=\frac{5}{2},\quad \alpha_2=\frac{5}{4},\quad \alpha_3=\frac{5}{8},\quad \alpha_4=\frac{5}{16}$ και

$$b_0=1,\qquad b_1=3,\quad b_2=3^2,\quad b_3=3^3,\quad b_4=3^4$$

Εξ' ορισμού οι 5 πρώτοι όροι της $\delta_n, n=0,1,...,5$

$$\delta_0=a_0b_0,\quad \delta_1=a_0b_1+a_1b_0,\quad \delta_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,$$

$$\delta_3=a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0,$$

$$\delta_4=a_0b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0$$

Η κύρια ιδιότητα της συνέλιξης δύο ακολουθιών είναι ότι η γεννήτρια συνάρτηση της είναι το γινόμενο των γεννητριών συναρτήσεων των δύο ακολουθιών.

Οπότε έχουμε $A(x)=\frac{5}{1-\frac{1}{2}x}$ και $B(x)=\frac{1}{1-3x}$.

Επομένως $\Delta(x)=\frac{5}{1-\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{1-3x}$

6) Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_n=(n+2)2^n$, n=0, 1, 2, ….;

Απάντηση

Η δοθείσα ακολουθία είναι το άθροισμα δύο ακολουθιών $\alpha_0=n2^n+2\cdot 2^n$ εκ των οποίων στην πρώτη εφαρμόζεται η ιδιότητα της κλίμακας.

Οπότε η ΓΣ της ακολουθίας $n2^n$ είναι η $x\left(\frac{1}{1-2x}\right)'=\frac{-2x}{(1-2x)^2}$, ενώ της $2\cdot 2^n$ είναι η $\frac{2}{1-2x}$.

Συνεπώς $A(x)=2\frac{1-3x}{(1-2x)^2}$.

7) Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\alpha_n=2^n/(n+1)$, n=0, 1, 2, ….;

Η 2^n έχει ΓΣ την $\frac{1}{1-2x}$. Από την δεύτερη ιδιότητα της κλίμακας, η α_n έχει ΓΣ την $\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1-2t}dt = -\frac{1}{2x}[\ln(1-2t)]\begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} = -\frac{\ln(1-2x)}{2x}$.

8) Για x πραγματικό και k θετικό ακέραιο ισχύουν οι σχέσεις

i) $k\binom{x}{k} = x\binom{x-1}{k-1}$, k > 1

ii) $\binom{x}{k} = \frac{x-k+1}{k}\binom{x}{k-1}$, $k \geq 1$

iii) $\binom{x}{k} = \frac{x}{x-k}\binom{x-1}{k}$, $k \geq 0$ και $x \neq k$

iv) $\binom{x}{k}\binom{k}{r} = \binom{x}{r}\binom{x-r}{k-r}$, $r \leq k$

v) $x\binom{x}{k} = (k+1)\binom{x}{k+1} + k\binom{x}{k} = k\binom{x+1}{k+1} + \binom{x}{k+1}$

Απάντηση

Όλες οι σχέσεις βασίζονται στον ορισμό του γενικευμένου διωνυμικού συντελεστή.

9) Βρείτε τον συντελεστή του α^2 στην παράσταση $\left(2a^3 + \frac{3}{a}\right)^6$.

Απάντηση

$$\left(2\alpha^3 + \frac{3}{\alpha}\right)^6 = \sum_{\kappa=0}^{6}\binom{6}{\kappa}(2\alpha^3)^\kappa\left(\frac{3}{\alpha}\right)^{6-\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{6}\binom{6}{\kappa}\alpha^{3\kappa}2^\kappa 3^{6-\kappa}\frac{1}{\alpha^{6-\kappa}}$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{6}\binom{6}{\kappa}2^\kappa 3^{6-\kappa}\alpha^{3\kappa-6+\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{6}\binom{6}{\kappa}2^\kappa 3^{6-\kappa}\alpha^{4\kappa-6}.$$

Ο συντελεστής του α^2 δίνεται εάν θέσουμε $\kappa = 2$ και είναι ο $\binom{6}{2}4 \cdot 3^4$.

10) Ποιος είναι ο συντελεστής του όρου του αναπτύγματος της παράστασης $\left(3x^5 - \frac{5}{x^3}\right)^{16}$ ο οποίος είναι ανεξάρτητος του x;

Απάντηση

$\left(3x^5 - \frac{5}{x^3}\right)^{16} = \left(3x^5 + \left(\frac{-5}{x^3}\right)\right)^{16} = \sum_{\kappa=0}^{16}\binom{16}{\kappa}3^\kappa x^{5\kappa}(-5)^{16-\kappa}\frac{1}{x^{3(16-\kappa)}} =$

$$\sum_{\kappa=0}^{16}\binom{16}{\kappa}3^\kappa(-5)^{16-\kappa}x^{5\kappa-48+3\kappa} = \sum_{\kappa=0}^{16}\binom{16}{\kappa}3^\kappa(-5)^{16-\kappa}x^{8\kappa-48}$$

Ο συντελεστής του όρου που είναι ανεξάρτητος του x δίνεται εάν θέσουμε $\kappa = 6$ και είναι ο $\binom{16}{6} 3^6(-5)^{10} = \binom{16}{6} 3^6 5^{10}$.

11) Αν x είναι πραγματικός με |x|<1 να δειχθεί ότι $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$. (Λάβε υπόψη το 1ο παράδειγμα της σελίδας 3 στις διαφάνειες 9ου μαθήματος για το $\binom{2k}{k}$)

Απάντηση

Έχουμε ότι: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{\frac{-1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k(x)^k =$ (από την υπόδειξη)

$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k 2^{-2k}\binom{2k}{k}(-1)^k(x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$.

12) Αν x πραγματικός και k ακέραιος να δειχθεί ότι $x^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(x-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(x+1)^{k-i}$.

Απάντηση

- $x^k = \left(1 + (x-1)\right)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} 1^i (x-1)^{k-i}$
- $x^k = \left(-1 + (x+1)\right)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(x+1)^{k-i}$

13) Ένας επενδυτής πρόκειται να επενδύσει 1.000€ σε 4 διακεκριμένες μετοχές. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να προχωρήσει ο επενδυτής στην επένδυσή του με την προϋπόθεση ότι σε κάθε μετοχή θα επενδυθούν τουλάχιστον 100€.

Απάντηση

Θεωρούμε ότι σε κάθε μετοχή επενδύεται ποσό που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του ενός ευρώ. Οπότε η γεννήτρια είναι η

$$(x^{100} + x^{101} + \cdots + x^{1000})^4$$

Σε αυτή ζητάμε τον συντελεστή του x^{1000}. Ισοδύναμα μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή στην συνάρτηση $(x^{100} + x^{101} + \cdots + x^{1000} + \cdots)^4 = x^{400}(1 + x + x^2 + \cdots)^4 = x^{400}(1-x)^{-4}$. Ισοδύναμα πάλι μπορούμε να βρούμε τον συντελεστή του x^{600} στην συνάρτηση $(1-x)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4-1}{n}x^n$. Αυτός προφανώς είναι ο $\binom{603}{600}$.

14) Ένας αγοραστής έχει στο πορτοφόλι του 10 κέρματα του ενός €, 10 κέρματα των δύο € και 10 χαρτονομίσματα των 5 € και αγοράζει προϊόντα αξίας 50 €. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε τον όρο, ο συντελεστής του οποίου θα δώσει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να πληρώσει ο αγοραστής.

Απάντηση

Ο απαριθμητής για τα κέρματα του ενός € είναι $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})$,

ο απαριθμητής για τα κέρματα των δύο € είναι $(1 + x^2 + x^4 \cdots + x^{20})$,

και ο απαριθμητής για τα χαρτονομίσματα των πέντε € είναι

$(1 + x^5 + x^{10} \cdots + x^{50})$.

Η γεννήτρια συνάρτηση είναι

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(1 + x^2 + x^4 \cdots + x^{20})(1 + x^5 + x^{10} \cdots + x^{50})$$

και το ζητούμενο δίνεται από τον συντελεστή του x^{50} .

15) Σε μια κληρωτίδα τοποθετούνται 40 μπάλες (4 μπάλες για κάθε έναν από τους αριθμούς 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Αν κληρωθούν 4 μπάλες, υπολογίστε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά κλήρωσης

Απάντηση

Για κάθε ψηφίο ο απαριθμητής μετρά το πλήθος των φορών που μπορεί να εμφανιστεί, από 0 έως και 4. Συνεπώς η γεννήτρια είναι η

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^{10}$$

Αναζητούμε τον συντελεστή του x^4.

Μπορούμε χωρίς λάθος να πάμε την άθροιση μέσα στην παρένθεση μέχρι το άπειρο, οπότε η ΓΣ γίνεται $(1 - x)^{-10}$.

Χρησιμοποιώντας τώρα το γενικευμένο διωνυμικό ανάπτυγμα παίρνουμε:

$(1 - x)^{-10} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{10+n-1}{n} x^n$. Ο ζητούμενος συντελεστής βρίσκεται για n=4 και είναι $\binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4}$.

16) Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να σχηματιστεί μια δυαδική συμβολοσειρά μήκους 100 με 10 εμφανίσεις του συμβόλου 1 και 90 εμφανίσεις του συμβόλου 0 αν η συμβολοσειρά αρχίζει και τελειώνει με το σύμβολο 1 και ανάμεσα σε δύο διαδοχικές εμφανίσεις του συμβόλου 1 θα πρέπει να παρεμβάλλονται τουλάχιστον 3 εμφανίσεις του συμβόλου 0.

Απάντηση

Τοποθετούμε τους 10 άσσους στην σειρά (οι δύο από αυτούς είναι στην αρχή και στο τέλος της λέξης). Ανάμεσά τους σχηματίζονται εννέα κενές «υποδοχές». Σε κάθε μία από τις υποδοχές πρέπει να τοποθετήσουμε από τρία και πάνω μηδενικά και ο ζητούμενος αριθμός των λέξεων ισοδυναμεί πλέον με όλους τους δυνατούς τρόπους να διαμοιράσουμε τα μηδενικά στις εννέα υποδοχές ανάμεσα στους άσσους. Με τον τρόπο αυτό θα έχουμε σχηματίσει τον αριθμό σύμφωνα με τα ζητούμενα, αφού θα ξεκινάει και θα τελειώνει με άσσους και ανάμεσα στους άσσους θα υπάρχουν τουλάχιστον τρία μηδενικά. Ο απαριθμητής λοιπόν για κάθε «υποδοχή» είναι ο $(x^3+x^4+x^5+\ldots+x^{90})$.

Ενώ η ζητούμενη γεννήτρια συνάρτηση θα είναι η $(x^3+x^4+x^5+\ldots+x^{90})^9$. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο του $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{87})^9$

Στο οποίο αναζητούμε το συντελεστή του x^{63}

Το οποίο είναι ισοδύναμο του $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^9$

Στο οποίο αναζητούμε το συντελεστή του x^{63}

$$(1+x+x^2+\cdots)^9=(1-x)^{-9}=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{9+n-1}{n}x^n$$

Ζητούμενος συντελεστής για n=63:

$$\frac{(9+63-1)!}{63!\,8!}=\frac{71!}{63!\,8!}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε χωρίς χρήση γεννήτριας συνάρτησης διανέμοντας ανάμεσα από δύο διαδοχικούς άσσους από 3 μπάλες και στην συνέχεια τις υπόλοιπες 63 μπάλες χωρίς περιορισμούς στις 9 υποδοχές που σχηματίζονται ανάμεσα από δύο άσσους.

17) Στο ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα, μια ομάδα παίρνει τρεις βαθμούς για την νίκη, έναν για την ισοπαλία και μηδέν για την ήττα σε σύνολο 36 αγώνων που δίνει η ομάδα στο πρωτάθλημα.

i) Με πόσους τρόπους μπορεί μια ομάδα να συγκεντρώσει 40 βαθμούς αν δεν έχει σημασία η σειρά των αποτελεσμάτων;

ii) Με πόσους τρόπους μπορεί η ομάδα να συγκεντρώσει 18 βαθμούς στις 18 αγωνιστικές του πρώτου γύρου αν δεν έχει σημασία η σειρά των αποτελεσμάτων και θέλει να κάνει περισσότερες ισοπαλίες από ήττες;

Απάντηση

Έστω N, I, H ο αριθμός των νικών, των ισοπαλιών και των ηττών της ομάδας αντίστοιχα. Από τα δεδομένα του ερωτήματος προκύπτει ότι πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

3N+I=40,

N+I+H=36

Αν πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη εξίσωση επί 3 και από αυτήν αφαιρέσουμε την πρώτη, έχουμε 2I+3H=68.

Αφού δεν μας ενδιαφέρει η σειρά των αποτελεσμάτων, ουσιαστικά αναζητούμε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές των μεταβλητών I και H, ώστε να είναι ακέραιες, μη αρνητικές, και να ικανοποιείται η πιο πάνω εξίσωση. Χρησιμοποιούμε λοιπόν απλή γεννήτρια συνάρτηση, στην οποία ο απαριθμητής που αντιστοιχεί στη μεταβλητή I είναι

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{72})$$

ενώ ο απαριθμητής που αντιστοιχεί στη μεταβλητή H είναι

$$(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots + x^{108})$$

Χρησιμοποιήσαμε και εδώ ως άνω όριο στους εκθέτες των δυνάμεων κάθε απαριθμητή αυτό που προκύπτει από το γεγονός ότι οι ήττες δεν μπορούν να ξεπεράσουν τις 36 και επίσης οι νίκες δεν μπορούν να ξεπεράσουν τις 36 αφού ο αριθμός των αγώνων που δίνει η ομάδα είναι 36. Η γεννήτρια συνάρτηση προκύπτει από το γινόμενο των δύο απαριθμητών ως εξής:

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{72})\,(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots + x^{108})$$

και σε αυτή αναζητούμε το συντελεστή του x^{68}

Μπορούμε βεβαίως να απομακρύνουμε τους όρους με εκθέτες μεγαλύτερους του 68 στον πρώτο απαριθμητή και 66 στο δεύτερο απαριθμητή αφού αυτοί προφανώς δεν επηρεάζουν το συντελεστή του x^{68}.

Τη δύναμη όμως x^{68} δίνουν τα εξής γινόμενα όρων:

$$x^{68}x^0, x^{62}x^6, x^{56}x^{12}, x^{50}x^{18}, x^{44}x^{24}, x^{38}x^{30}, x^{32}x^{36}, x^{26}x^{42}, x^{20}x^{48}, x^{14}x^{54}, x^8x^{60}, x^2x^{66}$$

που είναι 12. Άρα ο συντελεστής του x^{68} και επομένως το ζητούμενο του υποερωτήματος είναι 12.

(ii) Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να ισχύουν οι εξής εξισώσεις

3N+I=18

N+I+H=18

I>H

Για να εξασφαλίσουμε την απαίτηση I>H, εισάγουμε μια καινούργια μεταβλητή Λ=I-H άρα I=Λ+H. Με την αντικατάσταση του I στις εξισώσεις που φαίνονται στην αρχή της λύσης του υποερωτήματος, οι απαιτήσεις μας διαμορφώνονται εξής:

Λ>0,

3N+Λ+H=18

N+Λ+2H=18

Αν πολλαπλασιάσουμε την προτελευταία εξίσωση επί 2 και από αυτήν αφαιρέσουμε την τελευταία, έχουμε 5N+Λ=18. Αναζητούμε λοιπόν τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε τις τιμές των μεταβλητών N και Λ, ώστε να είναι ακέραιες, να ικανοποιείται εξίσωση 5N+Λ=18, ενώ επιπλέον η N πρέπει να είναι θετική ή μηδέν και η Λ θα πρέπει να είναι θετική. Χρησιμοποιούμε λοιπόν απλή γεννήτρια συνάρτηση, στην οποία ο απαριθμητής που αντιστοιχεί στη μεταβλητή N είναι

$$(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots + x^{90}),$$

ενώ ο απαριθμητής που αντιστοιχεί στη μεταβλητή Λ είναι

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{18})$$

Χρησιμοποιήσαμε ως άνω όριο στους εκθέτες των δυνάμεων κάθε απαριθμητή αυτό που προκύπτει από το γεγονός ότι οι νίκες και η μεταβλητή Λ δεν μπορούν να ξεπεράσουν τις 18, αφού ο αριθμός των αγώνων που δίνει η ομάδα στη διάρκεια του πρώτου γύρου είναι 18.

Η γεννήτρια συνάρτηση λοιπόν είναι

$$(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots + x^{90})(x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{18})$$

και σε αυτή αναζητούμε το συντελεστή του x^{18}.

Ας σημειωθεί και εδώ ότι μπορούμε να απομακρύνουμε τους όρους με εκθέτες μεγαλύτερους του 15 στον πρώτο απαριθμητή αφού αυτοί προφανώς δεν επηρεάζουν το συντελεστή του x^{18}.

Τη δύναμη όμως x^{18} δίνουν τα εξής γινόμενα όρων:

$$x^0x^{18}, x^5x^{13}, x^{10}x^8, x^{15}x^3$$

που είναι 4. Άρα ο συντελεστής του x^{18} και επομένως το ζητούμενο του υποερωτήματος είναι 4.

18) Αποδείξτε προσεκτικά τους γνωστούς τύπους των συνδυασμών χωρίς και με επανάληψη με την βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων (δείτε την διαφάνεια της σελίδας 6 του 10^ου^ μαθήματος).

19) Σε ένα ράφι ενός σούπερ-μάρκετ βρίσκονται 8 κονσέρβες ενός είδους, 12 ενός δεύτερου και 10 ενός τρίτου. Όλες οι κονσέρβες αγοράστηκαν από δύο πελάτες έτσι ώστε κάθε ένας πήρε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος και 15 κονσέρβες συνολικά. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνατε την δύναμη του x ο συντελεστής της οποίας δίνει τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να γίνει αυτή η αγορά.

Απάντηση

Επειδή κάθε πελάτης πρέπει να αγοράσει 2 τουλάχιστον κονσέρβες από κάθε είδος, μπορεί να αγοράσει μέχρι 6 κονσέρβες από το πρώτο είδος, μέχρι 10 από το δεύτερο και μέχρι 8 από το τρίτο. Επιπλέον, με οποιαδήποτε αγορά μέσα σε αυτά τα όρια (δηλ. 2 έως 6, 2 έως 10 και 2 έως 8 από τα τρία είδη αντίστοιχα) και 15 συνολικά, οι υπόλοιπες κονσέρβες αποτελούν αγορά μέσα στις προδιαγραφές για τον δεύτερο πελάτη. Συνεπώς αρκεί να δοθεί γεννήτρια συνάρτηση για τον αριθμό των τρόπων αγοράς μέσα σε αυτά τα όρια από τον ένα πελάτη.

Οι απαριθμητές για κάθε είδος είναι συνεπώς $(x^2 + x^3 + \dots + x^6)$ για το πρώτο είδος, $(x^2 + x^3 + \dots + x^{10})$ για το δεύτερο και $(x^2 + x^3 + \dots + x^8)$ για το τρίτο.

Η συνολική γεννήτρια είναι το γινόμενο των τριών απαριθμητών.

$$(x^2 + x^3 + \dots + x^6)(x^2 + x^3 + \dots + x^{10})(x^2 + x^3 + \dots + x^8)$$

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του $\boldsymbol{x^{15}}$**.**

20) 100 άνθρωποι (που θεωρούνται μη διακεκριμένοι) βρίσκονται σε ένα τραίνο και πρόκειται να κατέβουν όλοι στις 4 επόμενες στάσεις. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε την δύναμη του x της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να γίνει αυτό, όταν:

i) δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των επιβατών που κατεβαίνουν σε κάθε στάση.
ii) γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των επιβατών που θα κατέβουν στην δεύτερη στάση είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού των επιβατών που θα κατέβουν στην πρώτη και μικρότερος ή ίσος αυτών που θα κατέβουν στην τρίτη στάση.
iii) Βρείτε τους παραπάνω συντελεστές

Απάντηση

Από την διατύπωση του προβλήματος είναι φανερό ότι αυτό που διαφοροποιεί ένα τρόπο αποβίβασης των επιβατών από κάποιον άλλο είναι ο αριθμός των ανθρώπων που κατεβαίνουν σε κάποια στάση. Το πρόβλημα λοιπόν είναι ισοδύναμο με την εύρεση του αριθμού των τρόπων διανομής 100 μη διακεκριμένων σφαιριδίων σε 4 διακεκριμένες υποδοχές.

(i) Όταν δεν υπάρχει περιορισμός, ο απαριθμητής για τον αριθμό των επιβατών κάθε στάσης είναι $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})$. Η γεννήτρια συνάρτηση είναι κατά συνέπεια το γινόμενο των τεσσάρων απαριθμητών δηλαδή $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})^4$.

Ο ζητούμενος συντελεστής είναι του x^{100}. Προφανώς δεν υπάρχει πρόβλημα να πάμε την άθροιση στις δυνάμεις του x μέχρι το άπειρο. Δηλαδή ισοδύναμα ζητάμε τον συντελεστή του x^{100} στην συνάρτηση $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100} + \cdots)^4 = (1 - x)^{-4} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4-1}{n}x^n$. Αυτός είναι ο $\binom{103}{100}$. (Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε χωρίς την χρήση γεννήτριας συνάρτησης βλέποντας το πρόβλημα σαν διανομή 100 ίδιων μπαλών σε 4 διακεκριμένες υποδοχές.)

(ii) Έστω z_1, z_2, z_3, z_4 το πλήθος των επιβατών που κατεβαίνουν στις τέσσερεις στάσεις αντίστοιχα. Προφανώς θέλουμε $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 100$. Ο δοθείς περιορισμός είναι $z_1 \leq z_2 \leq z_3$. Η πρώτη ανισότητα δίνει $z_2 = z_1 + s_1$ για κάποια μεταβλητή $s_1 \geq 0$. Παρόμοια, η δεύτερη ανισότητα δίνει $z_3 = z_2 + s_2$ για $s_2 \geq 0$.. Αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι ο αριθμός των τρόπων αποβίβασης είναι όσες οι διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης $3z_1 + 2s_1 + s_2 + z_4 = 100$, όπου $z_1, z_4, s_1, s_2 \geq 0$. Και το πρόβλημα αυτό μπορεί να ιδωθεί σαν διανομή 100 σφαιριδίων σε 4 υποδοχές με τον περιορισμό ότι ο αριθμός των σφαιριδίων στην πρώτη πρέπει να είναι πολλαπλάσιος του 3, στην δεύτερη πολλαπλάσιος του 2 ενώ δεν υπάρχει περιορισμός για τις δύο τελευταίες υποδοχές. Η γεννήτρια συνάρτηση λοιπόν είναι:

$$(1 + x^3 + x^6 + \dots + x^{99})(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{100})^2$$

Και στην περίπτωση αυτή ο ζητούμενος συντελεστής είναι του x^{100}.

21) Στις παρακάτω προτάσεις αναφέρονται οι γεννήτριες συναρτήσεις απλών προβλημάτων απαρίθμησης.

i) Ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $x^r(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των υποσυνόλων με $(k-r)$ στοιχεία ($k \geq r$) ενός n -μελους συνόλου

ii) Ο συντελεστής του $x^k / k!$ στην παράσταση $(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των διατάξεων k αντικειμένων από n

iii) Η παράσταση $(1-x)^{-1}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_i = 1, i = 0,1,2,\dots$

(Απ. Σ-Σ-Σ)

22) Θέλουμε να τοποθετήσουμε στη σειρά n πράσινους βόλους και m κόκκινους βόλους ($m \leq n$) ώστε να υπάρχει τουλάχιστον ένας πράσινος βόλος ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κόκκινων βόλων (η αρχή και το τέλος της σειράς θεωρούνται διακεκριμένα). Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον

23) όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τοποθετήσεων.

Απάντηση

Τοποθετούμε στη σειρά τους m κόκκινους βόλους (υπάρχει μόνο ένας τρόπος να γίνει αυτό, αφού οι κόκκινοι βόλοι δεν είναι διακεκριμένοι). Επειδή η αρχή και το τέλος της σειράς είναι διακεκριμένα, σχηματίζονται m+1 διακεκριμένες υποδοχές στις οποίες πρέπει να τοποθετηθούν οι n πράσινοι βόλοι (που επίσης δεν είναι διακεκριμένοι).

Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για την πρώτη και την τελευταία υποδοχή. Συνεπώς, ο απαριθμητής για την πρώτη και την τελευταία υποδοχή είναι $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$.

Οι υπόλοιπες $m - 1$ υποδοχές ορίζονται από δύο διαδοχικούς κόκκινους βόλους. Καμία από αυτές δεν πρέπει να μείνει κενή, ώστε τελικά να έχουμε τουλάχιστον ένα πράσινο βόλο ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κόκκινων βόλων. Συνεπώς ο απαριθμητής για καθεμία από τις $m - 1$ υποδοχές που ορίζονται από δύο διαδοχικούς κόκκινους βόλους είναι $(x + x^2 + x^3 + \cdots)$.

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του x^n στη γεννήτρια συνάρτηση

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^2(x + x^2 + x^3 + \cdots)^{m-1}$$

2ος τρόπος: Τοποθετούμε στη σειρά τους m κόκκινους βόλους οπότε σχηματίζονται $m+1$ διακεκριμένες υποδοχές. Τοποθετούμε επίσης από έναν πράσινο βόλο σε καθεμιά από τις $m-1$ εσωτερικές υποδοχές (υπάρχει μόνο ένας τρόπος να γίνει αυτό, αφού οι πράσινοι βόλοι δεν είναι διακεκριμένοι). Απομένουν $n-(m-1)$ πράσινοι βόλοι οι οποίοι πρέπει να τοποθετηθούν σε $m+1$ διακεκριμένες υποδοχές. Ο απαριθμητής για κάθε υποδοχή είναι $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$.

Το ζητούμενο δίνεται από το συντελεστή του $x^{n-(m-1)}$ στη γεννήτρια συνάρτηση $(x + x^2 + x^3 + \cdots)^{m+1}$.