Ασκήσεις Συνδυαστικής

Κανόνες αθροίσματος και γινομένου
Διατάξεις-Συνδυασμοί

1) Το τμήμα μαθηματικών στο οποίο σπουδάζει ένας φοιτητής προσφέρει 3 μαθήματα πληροφορικής, 2 μαθήματα φυσικής και 2 μαθήματα αστρονομίας.
   i) Πόσες είναι οι διαφορετικές επιλογές του φοιτητή αν πρέπει να επιλέξει ένα μόνο μάθημα από όλα τα παραπάνω;
   ii) Πόσες είναι οι διαφορετικές επιλογές του φοιτητή αν πρέπει να επιλέξει 1 μάθημα πληροφορικής, 1 μάθημα φυσικής και 1 μάθημα αστρονομίας;

Απάντηση

i) Ο φοιτητής πρέπει να επιλέξει μόνο ένα μάθημα από κάθε ομάδα μαθημάτων. Συνεπώς τα ενδεχόμενα είναι αμοιβαία αποκλειόμενα. Άρα οι επιλογές του φοιτητή θα είναι $3 + 2 + 2 = 7$.
ii) Τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα άρα οι επιλογές του φοιτητή θα είναι $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

2) Υπολογίστε τους τρόπους τοποθέτησης 10 διακεκριμένων ατόμων (5 ανδρών και 5 γυναικών) σε μια σειρά, ώστε στην πρώτη θέση της σειράς να τοποθετείται γυναίκα.

Απάντηση

Στην πρώτη θέση της σειράς τοποθετούμε μια γυναίκα, έχοντας 5 επιλογές. Μένουν 9 θέσεις να τοποθετήσουμε τις υπόλοιπες 4 γυναίκες και τους 5 άντρες. Οι τρόποι τοποθέτησης τους είναι όσοι και οι μεταθέσεις 9 αντικειμένων, δηλαδή 9!. Άρα συνολικά οι τρόποι θα είναι $5 \cdot 9! = 1.814.400$.

3) Ένας πατέρας έχει 3 παιδιά και θέλει να δώσει χαρτζιλίκι από 1€ έως 5€ στο κάθε παιδί του.
   i) Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει αν έχει να διαθέσει το πολύ 15€;
   ii) Τι αλλάζει σε σχέση με το i) αν έχει να διαθέσει το πολύ 13€;

Απάντηση

i) Ο πατέρας μπορεί να δώσει χαρτζιλίκι στο $1^{ο}$ παιδί από 1€-5€, άρα έχει 5 επιλογές. Αντίστοιχα για το $2^{ο}$ και $3^{ο}$ παιδί. Συνεπώς οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να διαθέσει 15€ είναι $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

ii) Στην περίπτωση που έχει να διαθέσει το πολύ 13€ θα πρέπει από τους παραπάνω 125 τρόπους να αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις $5+5+5, 5+5+4, 5+4+5, 4+5+5$, δηλαδή $125-4=121$ τρόποι.

4) Να δειχθούν οι παρακάτω σχέσεις.

i) $(n)_1 = n$

ii) $(n)_{n-1} = n!$

iii) $(n)_k = n(n-1)_{k-1},\ k \geq 2$

iv) $(n)_k = (n-k+1)\cdot(n)_{k-1},\ 2 \leq k \leq n+1$

v) $(n)_k = (n)_r \cdot (n-r)_{k-r},\ 1 \leq r \leq k$

vi) $(n)_k = \dfrac{n}{n-k}(n-1)_k,\ 1 \leq k \leq n-1$

vii) $(n+1)_k = (n)_k + k(n)_{k-1},\ 1 \leq k \leq n$

viii) $(n+1)_k = k! + k((n)_{k-1} + (n-1)_{k-1} + \cdots \qquad),\ 1 \leq k \leq n$

Απάντηση

Όλες οι σχέσεις αποδεικνύονται με αλγεβρικές πράξεις με εφαρμογή του τύπου των διατάξεων $(n)_k = n!/(n-k)!$.

5) Σε μια τάξη υπάρχουν *n* αγόρια και *n* κορίτσια. Να υπολογίσετε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να σχηματιστούν *n* ζευγάρια, ώστε κάθε ζευγάρι να αποτελείται από ένα αγόρι και ένα κορίτσι.

Απάντηση

Το 1^{ο} αγόρι έχει n επιλογές να επιλέξει ένα κορίτσι, το 2^{ο} έχει (n-1) κ.ο.κ. Άρα n!.

6) Πόσοι άρτιοι αριθμοί μεταξύ 10000 και 79999 υπάρχουν με όλα τα ψηφία τους διαφορετικά;

Απάντηση

Οι περιπτώσεις που έχουμε είναι οι εξής: το 1^{ο} ψηφίο να είναι 2,4,6 και το τελευταίο άρτιο με 4 τρόπους (αφού είναι 5 τα άρτια ψηφία και έχουμε ήδη τοποθετήσει ένα στην πρώτη θέση) άρα $3\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 6$ και η άλλη περίπτωση είναι να είναι το 1^{ο} ψηφίο 1,3,5,7 και το τελευταίο άρτιο δηλαδή $4\cdot 5\cdot 8\cdot 7\cdot 6$. Συνεπώς οι άρτιοι αριθμοί μεταξύ 10.000 και 79999 με όλα τα ψηφία τους διαφορετικά είναι $3\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 6+4\cdot 5\cdot 8\cdot 7\cdot 6=10.752$.

7) Πόσοι τρόποι τοποθέτησης σε ένα ράφι k διακεκριμένων βιβλίων άλγεβρας και k διακεκριμένων βιβλίων γεωμετρίας υπάρχουν;
   i) Αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.
   ii) Αν δύο βιβλία άλγεβρας δεν πρέπει να τοποθετηθούν δίπλα.

Απάντηση

i) Έχουμε 2k διαφορετικά αντικείμενα να τοποθετηθούν στην ευθεία. Πρόκειται για μεταθέσεις και άρα οι τρόποι είναι (2k)!
ii) Τοποθετούμε αρχικά τα k βιβλία άλγεβρας με k! τρόπους (μεταθέσεις των k αντικειμένων. Στην συνέχεια στα k-1 κενά ανάμεσα από τα βιβλία άλγεβρας τοποθετούμε k-1 βιβλία γεωμετρίας. Πρόκειται για διατάξεις των k ανά k-1 δηλαδή αυτή η τοποθέτηση γίνεται με $(k)_{k-1}$=k! τρόπους. Το τελευταίο βιβλίο γεωμετρίας τοποθετείται σε οποιοδήποτε από τα k-1 κενά μεταξύ των βιβλίων της άλγεβρας ή στην αρχή ή στο τέλος της σειράς. Δηλαδή με k+1 τρόπους. Συνολικά λοιπόν από τον κανόνα του αθροίσματος οι τρόποι είναι k!k!(k+1)=(k+1)!k!.

8) Πόσοι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων 5×5 υπάρχουν στους οποίους κάθε στοιχείο του πίνακα είναι 0 ή 1;

Απάντηση

Ο πίνακας έχει 25 στοιχεία κάθε ένα από τα οποία μπορεί να είναι 0 ή 1. Δηλαδή συνολικά 2^{25} πίνακες.

9) Ποιος είναι ο αριθμός των υποσυνόλων με τουλάχιστον 2 στοιχεία ενός συνόλου με *n* στοιχεία;

Απάντηση

Από το σύνολο των υποσυνόλων που είναι 2^n αφαιρούμε το κενό και τα μονοσύνολα που είναι *n* καθώς και το κενό σύνολο. Η απάντηση είναι $2^n - n - 1$.

10) Με πόσους τρόπους 3 αγόρια και 3 κορίτσια μπορούν να καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι 6 θέσεων αν κάθε αγόρι πρέπει να κάθεται ανάμεσα από δύο κορίτσια; Δύο τρόποι θεωρούνται ίδιοι αν κινούμενοι γύρω από το τραπέζι (ανεξάρτητα από φορά), συναντάμε με την ίδια σειρά, τα ίδια άτομα.
   i) Αν δεν έχουν σημασία τα καθίσματα που κάθεται κάθε άτομο.
   ii) Αν τα καθίσματα είναι αριθμημένα και έχει σημασία σε ποιο κάθισμα κάθεται κάποιο άτομο.

Απάντηση

i) Τοποθετούμε τα αγόρια κάθισμα παρά κάθισμα με 1 τρόπο. Ο λόγος είναι ότι αφενός τα καθίσματα δεν είναι αριθμημένα, αφετέρου τα αγόρια είναι 3 οπότε είναι ίδια η τοποθέτηση όπου δεξιά στο αγόρι 1 είναι το αγόρι 2 με την τοποθέτηση να είναι το αγόρι 2 αριστερά από το αγόρι 1. Στην συνέχεια στα 3 κενά ανάμεσα από τα αγόρια, τοποθετούμε τα 3 κορίτσια με 3!=6 τρόπους.
ii) Εδώ τα αγόρια τοποθετούνται με 3!=6 τρόπους όπως και τα κορίτσια. Συνολικά με 36 τρόπους.

11) Πόσοι αριθμοί από το 0 ως το 999.999 περιέχουν:
   (i) Ακριβώς μια φορά το 4;
   (ii) Τουλάχιστον μια φορά το 4;

Απάντηση

i) Τοποθετούμε το 4άρι με 6 τρόπους. Απομένουν 5 θέσεις, όπου στην κάθεμια μπορούμε να τοποθετήσουμε τους υπόλοιπους 9 αριθμούς. Άρα $6 \cdot 9^5 = 354.294$.
ii) Όλοι οι αριθμοί από το 0-999.999 είναι 1.000.000. από αυτούς αφαιρούμε εκείνους που δεν περιέχουν καμία φορά το 4. Άρα $10^6 - 9^6 = 468.559$ αριθμοί περιέχουν τουλάχιστον μια φορά το 4.

12) Με πόσους τρόπους μπορούν να προγραμματισθούν οι εξετάσεις 8 μαθημάτων του $1^{ου}$ έτους στις 30 ημέρες του Σεπτεμβρίου, αν:
   (i) Δεν εξετάζονται 2 μαθήματα την ίδια ημέρα και δεν ενδιαφέρει ποιο μάθημα εξετάζεται μια συγκεκριμένη μέρα;
   (ii) Δεν εξετάζονται 2 μαθήματα την ίδια ημέρα και ενδιαφέρει ποιο μάθημα εξετάζεται μια συγκεκριμένη μέρα;

Απάντηση

i) Εφόσον δεν μας ενδιαφέρει ποιο μάθημα εξετάζεται μια συγκεκριμένη μέρα, οι τρόποι προγραμματισμού τους θα είναι $\binom{30}{8} = \frac{30!}{8!\cdot(30-8)!}$.
ii) Εφόσον μας ενδιαφέρει η σειρά των μαθημάτων, οι τρόποι θα είναι $(30)_8 = \frac{30!}{(30-8)!}$.

13) Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να δημιουργηθούν 7 ομάδες των δύο ατόμων από ένα σύνολο 14 διακεκριμένων ατόμων.

Απάντηση

Επιλέγουμε ένα τυχαίο άτομο και έχουμε 13 επιλογές για να συμπληρώσουμε την ομάδα του, έπειτα επιλέγουμε τυχαία ένα άλλο και έχουμε 11 επιλογές κ.ο.κ. Συνεπώς οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να δημιουργηθούν 7 ομάδες των 2 ατόμων από 14 διακεκριμένα άτομα είναι $13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$.

14) Θεωρούμε τις μεταθέσεις των συμβόλων {A,B,C,1,2,3,*}. Σημειώστε αν τα παρακάτω είναι αλήθεια.

i) Υπάρχουν 7!/2 μεταθέσεις όπου το 1 εμφανίζεται πριν το 2.
ii) Υπάρχουν 3!·3! μεταθέσεις όπου το * εμφανίζεται στην μεσαία (4η) θέση.
iii) Υπάρχουν 5!/3! μεταθέσεις που περιέχουν την συμβολοσειρά ABC.
iv) Υπάρχουν 3!·3!·2 μεταθέσεις όπου το * εμφανίζεται στην πρώτη θέση ή στην τελευταία θέση και αμέσως μετά από κάθε γράμμα A,B,C βρίσκεται ένα ψηφίο 1,2,3.

(Απ. Σ-Λ-Λ-Σ)

15) Σε μια τράπουλα υπάρχουν 52 φύλλα (4 χρώματα με 13 χαρτιά το κάθε ένα). Στην επιλογή μας δεν ενδιαφέρει η σειρά. Σημειώστε αν τα παρακάτω είναι αλήθεια.
i) Ο αριθμός των επιλογών 4 φύλλων της τράπουλας ώστε να υπάρχει ένα από κάθε χρώμα είναι $13^4 \cdot 4!$.
ii) Ο αριθμός των επιλογών 4 φύλλων της τράπουλας ώστε να υπάρχει ένα από κάθε χρώμα είναι 13^4.
iii) Ο αριθμός των επιλογών 5 φύλλων της τράπουλας ώστε να είναι όλα από το ίδιο χρώμα είναι $4\binom{13}{5}$.

(Απ. Λ-Σ-Σ)

16) 10 επιβάτες που θεωρούνται διακεκριμένοι, βρίσκονται μέσα σε ένα λεωφορείο και απομένουν 3 στάσεις (ΣτΑ, ΣτΒ, ΣτΓ). Αν δεν έχει σημασία η σειρά:
i) Με πόσους τρόπους μπορούν να αποβιβαστούν όλοι οι επιβάτες από το λεωφορείο με δεδομένο ότι σε κάθε στάση μπορούν να αποβιβάζονται από κανένας έως και 10 επιβάτες;
ii) Με πόσους τρόπους μπορούν να αποβιβαστούν όλοι από το λεωφορείο αν πρέπει να κατέβουν από 4 σε δύο οποιεσδήποτε στάσεις και 2 στην άλλη;

Απάντηση

i) Ο κάθε επιβάτης έχει 3 επιλογές να κατέβει (ΣτΑ, ΣτΒ, ΣτΓ). Το πλήθος των επιβατών είναι 10 συνεπώς οι τρόποι να αποβιβαστούν είναι 3^{10}.

ii) Οι περιπτώσεις είναι τρεις, 4-4-2, 2-4-4, 4-2-4. Άρα $\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}\cdot 1+\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{4}\cdot 1+\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{2}\cdot 1=9.450$.

17) Σε μία συγκέντρωση συμμετέχουν 7 άνδρες και 3 γυναίκες. Όλοι οι άνδρες ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψία, όλες οι γυναίκες μεταξύ τους και 3 από τους άνδρες με 2 από τις γυναίκες.

i) Πόσες είναι οι χειραψίες στις οποίες μετέχει τουλάχιστον ένας άνδρας;
ii) Πόσες είναι οι χειραψίες που συμμετέχει τουλάχιστον μία γυναίκα;
iii) Ποιος είναι ο συνολικός αριθμός χειραψιών;
iv) Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός χειραψιών που κάνει ένα σύνολο 4 ανδρών σε αυτή τη συγκέντρωση;

Απάντηση

i) Οι 7 άνδρες ανταλλάσσουν μεταξύ τους χειραψία άρα οι τρόποι είναι $\binom{7}{2}$ και επιπλέον 3 από αυτούς με 2 από τις γυναίκες δηλαδή $2\cdot 3$. Συνεπώς οι χειραψίες που μετέχει τουλάχιστον ένας άνδρας είναι$\binom{7}{2}+6=27$.

ii) $\binom{3}{2}+6=9$.

iii) Οι άντρες ανταλλάσσουν μεταξύ τους 21 χειραψίες, οι γυναίκες μεταξύ τους 3 και οι τρεις άντρες με δύο από τις γυναίκες 6. Άρα ο συνολικός αριθμός χειραψιών είναι $21+3+6=30$.

iv) Ο πρώτος από τους 4 ανταλλάσσει χειραψία με τους υπόλοιπους 6. Ο δεύτερος πάλι με τους 6, όμως τη χειραψία με τον προηγούμενο την έχουμε διπλομετρήσει, άρα 5. Αντίστοιχα ο τρίτος με τους 4 και ο τέταρτος με τους 3. Επιπλέον τρεις από αυτούς θα ανταλλάξουν χειραψία και με δύο γυναίκες άρα συνολικά θα είναι $6+5+4+3+3\cdot 2=24$.

18) Αν n, k είναι θετικοί ακέραιοι δείξτε τις παρακάτω σχέσεις.

i) $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1},\ 1\le k\le n$

ii) $\binom{n}{k}=\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1},\ 1\le k\le n$

iii) $\binom{n}{k}=\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k},\ 1\le \mathrm{k}\le \mathrm{n}$

iv) $\binom{n}{k}\binom{k}{r}=\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r},\ 0\le r\le \mathrm{k}\le \mathrm{n}$

v) $(k)_r\binom{n}{k}=(n)_r\binom{n-r}{k-r},\ 0\le r\le \mathrm{k}\le \mathrm{n}$

vi) $n\binom{n}{k}=(k+1)\binom{n}{k+1}+k\binom{n}{k}=k\binom{n+1}{k+1}+\binom{n}{k+1}$

19) Πόσες ακολουθίες μήκους 15 που απαρτίζονται από 6 μηδενικά, 5 άσσους και 4 δυάρια μπορούμε να φτιάξουμε με την προϋπόθεση ότι το πρώτο στη σειρά μηδενικό που εμφανίζεται προηγείται του πρώτου άσσου;

Απάντηση

Τοποθετούμε τα 4 δυάρια με $\binom{15}{4}$ τρόπους εφόσον δεν μας ενδιαφέρει η σειρά. Στην πρώτη κενή θέση τοποθετούμε το ένα μηδενικό και απομένουν να τοποθετήσουμε όπου θέλουμε τους 5 άσσους με $\binom{10}{5}$ τρόπους και τα υπόλοιπα 5 μηδενικά. Συνεπώς οι ακολουθίες είναι $\binom{15}{4}\cdot 1\cdot\binom{10}{5}\cdot 1$.

20) Σε μια εταιρεία εργάζονται 8 άνδρες και 6 γυναίκες. Με πόσους τρόπους μπορεί να συσταθεί το ΔΣ της εταιρείας το οποίο έχει 3 διακεκριμένες θέσεις αν είναι υποχρεωτικό να συμμετέχει σε αυτό μία τουλάχιστον γυναίκα;

Απάντηση

Από το σύνολο των επιλογών 3 ατόμων από 14, αν δεν υπήρχε ο περιορισμός (που είναι $(14)_3$) αφαιρούμε αυτές που μετέχουν μόνο άνδρες που είναι $(8)_3$. Το σύνολο είναι λοιπόν $(14)_3$-$(8)_3$.

21) Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε δύο μη διακεκριμένα πιόνια στα 64 (8x8) διακεκριμένα τετραγωνίδια μιας σκακιέρας, όταν δεν επιτρέπεται η τοποθέτηση των πιονιών σε γειτονικά τετραγωνίδια (γειτονικά τετραγωνίδια θεωρούνται εκείνα που είναι διαδοχικά σε μια γραμμή, στήλη η διαγώνιο).

Απάντηση

Όλοι οι τρόποι τοποθέτησης των δύο μη διακεκριμένων πιονιών στα 64 διακεκριμένα τετραγωνίδια είναι $\binom{64}{2}$. Από αυτούς θα αφαιρέσουμε τις περιπτώσεις όπου τα πίονια είναι διαδοχικά. Αυτές είναι $4 \cdot 3$ για τις τέσσερις γωνίες της σκακιέρας, $4 \cdot 6 \cdot 5$ για την περίμετρο της σκακιέρας (πλην των γωνιών) και $6 \cdot 6 \cdot 8$ για το εσωτερικό της. Όμως όλες οι πιθανές θέσεις έχουν μετρηθεί από 2 φορές συνεπώς έχουμε $\frac{(4 \cdot 3+4 \cdot 6 \cdot 5+6 \cdot 6 \cdot 8)}{2} \frac{420}{2} = 210$. Άρα τελικά οι τρόποι θα είναι $\binom{64}{2} - 210 = 1806$.

22) Μια παρέα 10 διακεκριμένων ατόμων πρόκειται να ταξιδέψει με πλοίο και θα χρησιμοποιήσει 4 καμπίνες με χωρητικότητα 4,3,2 και 1 ατόμων αντίστοιχα. Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν τα 10 άτομα στις 4 καμπίνες.

Απάντηση

Στην τοποθέτηση των ατόμων δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησής τους στην κάθε καμπίνα. Επομένως οι τρόποι θα είναι $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 1 = 210 \cdot 20 \cdot 3 = 12.600$.

23) Έχουμε τέσσερις καναπέδες (τους Α, Β, Γ, Δ) τους οποίους μπορούμε να «ντύσουμε» με ταπετσαρίες 6 διαφορετικών χρωμάτων από δύο χρωματικές ομάδες, τα «γήινα» (κόκκινο, πορτοκαλί, χρυσαφί) και τα «θαλασσινά» (μπλε, θαλασσί και πράσινο).

i) Πόσους δυνατούς χρωματισμούς έχουμε για το σαλόνι μας αν υποθέσουμε ότι το διαθέσιμο ύφασμα για κάθε χρώμα φτάνει για έναν μόνο καναπέ;
ii) Πόσους δυνατούς χρωματισμούς έχουμε για το σαλόνι μας αν υποθέσουμε ότι ο ένας μόνο καναπές πρέπει να είναι οπωσδήποτε κόκκινος ή πράσινος και έχουμε απεριόριστο ύφασμα από κάθε χρώμα;
iii) Πόσους δυνατούς χρωματισμούς έχουμε για το σαλόνι μας αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία μόνο χρωματική ομάδα για όλους τους καναπέδες (είτε τα «γήινα» ή τα «θαλάσσια» χρώματα) και έχουμε απεριόριστο ύφασμα από κάθε χρώμα;

Απάντηση

i) Έχουμε 6 χρώματα και 4 διακεκριμένους καναπέδες. Οι τρόποι είναι όσες οι διατάξεις των 6 ανά 4 δηλαδή $(6)_4$=360.
ii) Έχουμε 2 περιπτώσεις, να χρησιμοποιηθεί σε ένα καναπέ το κόκκινο χρώμα ή να χρησιμοποιηθεί το πράσινο χρώμα. Στην $1^η$ περίπτωση επιλέγουμε με 4 τρόπους τον κόκκινο καναπέ οπότε μένουν 4 χρώματα για τους 3 καναπέδες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν έως και 3 φορές το καθένα. Οι επιλογές για κάθε καναπέ είναι 4 άρα και για τους 3, 4^3=64. Με τον κανόνα του γινομένου έχουμε 4×64=256 τρόποι αν χρησιμοποιηθεί το κόκκινο χρώμα. Άλλοι τόσοι είναι αν χρησιμοποιηθεί το πράσινο χρώμα, δηλαδή συνολικά 256 τρόποι.

iii) Υπολογίζουμε τους τρόπους για μία χρωματική ομάδα. Για την άλλη, είναι προφανώς ίσοι. Όπως στο (ii) κάθε καναπές έχει 3 δυνατότητες και άρα οι τρόποι είναι 3^4=81. Συνολικά λοιπόν, 162.

24) Δεκαπέντε (διακεκριμένα) φορτηγά περνάνε με την σειρά (δηλαδή διατεταγμένα) από έναν τελωνιακό σταθμό. Για λόγους ασφαλείας (εύφλεκτα φορτία) δύο συγκεκριμένα από αυτά πρέπει να έχουν 3 ακριβώς άλλα φορτηγά ανάμεσά τους. Με πόσους τρόπους μπορούν να περάσουν από το τελωνείο τα φορτηγά;

Απάντηση

Τα 3 ενδιάμεσα φορτηγά επιλέγονται (και διατάσσονται) με $(13)_3$=11*12*13 τρόπους, ενώ όλη η ομάδα των 5 φορτηγών (σαν 1 αντικείμενο) μαζί με τα άλλα 10 διατάσσεται με 11! τρόπους. Τέλος, υπάρχουν 2 τρόποι για το ποιο από τα φορτηγά με τα εύφλεκτα φορτία προηγείται. Συνολικά λοιπόν 2*11!*11*12*13=2*11*13!.

25) Χαράσσουμε 6 παράλληλες μεταξύ τους ευθείες και άλλες 5 κάθετες σε αυτές. Πόσα διαφορετικά ορθογώνια θα σχηματιστούν;

(Απ. 150)

Απάντηση

Δύο από τις κάθετες ευθείες και δύο από τις οριζόντιες προσδιορίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι επιλογές λοιπόν είναι C(6,2)*C(5,2)=150.

26) Έστω X ένα n-μελες σύνολο, α ένα στοιχείο του X και k θετικός ακέραιος μικρότερος του n.

i) Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των n στοιχείων του X ανά k οι οποίοι περιέχουν το στοιχείο α;

ii) Πόσοι είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί των n στοιχείων του X ανά k οι οποίοι δεν περιέχουν το στοιχείο α;

iii) Χρησιμοποιώντας τα (i) και (ii) αποδείξτε την παρακάτω σχέση (τρίγωνο του Pascal).

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Απάντηση

i) Οι συνδυασμοί που το περιέχουν είναι $\binom{n-1}{k-1}$. (Επιλέγουμε το α και από τα υπόλοιπα n-1 στοιχεία τα k-1.)

ii) Οι συνδυασμοί που δεν περιέχουν το α είναι $\binom{n-1}{k}$.

iii) Όλοι οι συνδυασμοί των n ανά k είναι $\binom{n}{k}$ και αυτοί διαμερίζονται σε αυτούς που περιέχουν το α και σε αυτούς που δεν το περιέχουν. Άρα η σχέση προκύπτει άμεσα.

27) Το χρωματολόγιο μιας εταιρίας χρωμάτων αποτελείται από 8 βασικά χρώματα από τα οποία παράγονται όλα τα υπόλοιπα αναμιγνύοντάς τα με συγκεκριμένη δοσολογία («δόσεις»).

i) Πόσα χρώματα παράγονται με ανάμειξη <u>το πολύ τριών</u> από τα βασικά αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μόνο δόση από το κάθε ένα;

ii) Αν έχουμε μία μόνο δόση από κάθε βασικό χρώμα και θέλουμε να κατασκευάσουμε δύο χρώματα των 3 δόσεων και ένα χρώμα των δύο δόσεων με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

(Απ. (i) 92 (ii) 280)

Απάντηση

i) Στην ουσία πρέπει να μετρηθούν οι τρόποι επιλογής το πολύ 3 από τα 8 χρώματα. Άρα οι τρόποι είναι $\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3}=92$.

ii) Θέλουμε να μετρήσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να κατασκευάσουμε δύο 3-μελή και ένα διμελές υποσύνολο ενός 8-μελούς συνόλου. Οι τρόποι είναι $\binom{8}{3}\binom{5}{3}\binom{2}{2}/2=280$. Η διαίρεση με το 2 γίνεται διότι έχουμε δώσει διάταξη στις επιλογές των τριμελών συνόλων και συνεπώς διαιρούμε με 2!.

28) Δείξτε την ακόλουθη ταυτότητα του Vandermonde. Τα m, n, r είναι φυσικοί.

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$$

Απάντηση

Η ταυτότητα μπορεί να δειχθεί με αλγεβρικές πράξεις αλλά έχει μία σχετική δυσκολία (προσπαθήστε την πάντως!). Θα την δείξουμε στη συνέχεια με ένα απλό συνδυαστικό συλλογισμό. Το δεύτερο μέρος είναι οι συνδυασμοί των $m+n$ ανά r, δηλαδή το πλήθος των υποσυνόλων με πληθάριθμο r ενός συνόλου με $m+n$ στοιχεία. Ένα τέτοιο υποσύνολο όμως μπορεί να κατασκευαστεί διαμερίζοντας το σύνολο μας σε ένα (αυθαίρετο) υποσύνολο με m στοιχεία και σε ένα με τα υπόλοιπα n στοιχεία. Στην συνέχεια επιλέγουμε $k\leq r$ στοιχεία από το υποσύνολο με τα m στοιχεία και ένα υποσύνολο με r-k στοιχεία από τα υπόλοιπα n. Κάθε επιλογή των k στοιχείων μαζί με κάθε επιλογή των r-k στοιχείων μας δίνει ένα υποσύνολο με r στοιχεία *για δεδομένο k* και συνεπώς με εφαρμογή του κανόνα του γινομένου, το πλήθος τους είναι $\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$. Όλα τα δυνατά υποσύνολα με r στοιχεία τα παίρνουμε αθροίζοντας την ποσότητα αυτή για όλες τις τιμές του k από 0 έως r. Αυτό όμως είναι το πρώτο μέλος της ταυτότητας.