

Συνήθεις Γεννήτριες Συναρτήσεις

Το Γενικευμένο Διωνυμικό Θεώρημα

- 1) Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $1, 0, 1, 0, 1, \dots$;
- 2) Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_n = 2^n, n = 0, 1, 2, \dots$; Ποια της ακολουθίας $0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, \dots$; (Η δεύτερη είναι η πρώτη στην οποία έχουν προστεθεί τέσσερα 0 στην αρχή.)
- 3) Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $4, 5, 6, 7, \dots$;
- 4) Έστω μια ακολουθία $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ με γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$. Ποια είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $b_n = ca_n + d$ όπου c και d σταθερές.
- 5) Έστω οι ακολουθίες $a_n = 5/2^n$ και $b_n = 3^n, n = 0, 1, 2, \dots$. Βρείτε τους 5 πρώτους όρους της συνέλιξης των δύο ακολουθιών. Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της συνέλιξης;
- 6) Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_n = (n+2)2^n, n = 0, 1, 2, \dots$;
- 7) Ποια η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_n = 2^n/(n+1), n = 0, 1, 2, \dots$;
- 8) Για x πραγματικό και k θετικό ακέραιο ισχύουν οι σχέσεις
 - i) $k \binom{x}{k} = x \binom{x-1}{k-1}, k > 1$
 - ii) $\binom{x}{k} = \frac{x-k+1}{k} \binom{x}{k-1}, k \geq 1$
 - iii) $\binom{x}{k} = \frac{x}{x-k} \binom{x-1}{k}, k \geq 0$ και $x \neq k$
 - iv) $\binom{x}{k} \binom{k}{r} = \binom{x}{r} \binom{x-r}{k-r}, r \leq k$
 - v) $x \binom{x}{k} = (k+1) \binom{x}{k+1} + k \binom{x}{k} = k \binom{x+1}{k+1} + \binom{x}{k+1}$
- 9) Βρείτε τον συντελεστή του a^4 στην παράσταση $\left(2a^3 + \frac{3}{a}\right)^6$.
- 10) Ποιος είναι ο συντελεστής του όρου του αναπτύγματος της παράστασης $\left(3x^5 - \frac{5}{x^3}\right)^{16}$ ο οποίος είναι ανεξάρτητος του x ;
- 11) Αν x είναι πραγματικός με $|x| < 1$ να δειχθεί ότι $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{x}{4}\right)^k$. (Λάβε υπόψη το 1^ο παράδειγμα της σελίδας 3 στις διαφάνειες 9^{ου} μαθήματος για το $\binom{2k}{k}$)
- 12) Αν x πραγματικός και k ακέραιος να δειχθεί ότι $x^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (x-1)^{k-i} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (x+1)^{k-i}$.
- 13) Ένας επενδυτής πρόκειται να επενδύσει 1.000€ σε 4 διακεκριμένες μετοχές. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και υποδείξτε τον όρο του οποίου ο

συντελεστής δίνει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να προχωρήσει ο επενδυτής στην επένδυσή του με την προϋπόθεση ότι σε κάθε μετοχή θα επενδυθούν τουλάχιστον 100€.

- 14) Ένας αγοραστής έχει στο πορτοφόλι του 10 κέρματα του ενός €, 10 κέρματα των δύο € και 10 χαρτονομίσματα των 5 € και αγοράζει προϊόντα αξίας 50 €. Σχηματίστε γεννήτρια συνάρτηση και προσδιορίστε τον όρο, ο συντελεστής του οποίου θα δώσει τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να πληρώσει ο αγοραστής.
- 15) Σε μια κληρωτίδα τοποθετούνται 40 μπάλες (4 μπάλες για κάθε έναν από τους αριθμούς 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Αν κληρωθούν 4 μπάλες, υπολογίστε το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά κλήρωσης
- 16) Υπολογίστε τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να σχηματιστεί μια δυαδική συμβολοσειρά μήκους 100 με 10 εμφανίσεις του συμβόλου 1 και 90 εμφανίσεις του συμβόλου 0 αν η συμβολοσειρά αρχίζει και τελειώνει με το σύμβολο 1 και ανάμεσα σε δύο διαδοχικές εμφανίσεις του συμβόλου 1 θα πρέπει να παρεμβάλλονται τουλάχιστον 3 εμφανίσεις του συμβόλου 0.
- 17) Στο ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα, μια ομάδα παίρνει τρεις βαθμούς για την νίκη, έναν για την ισοπαλία και μηδέν για την ήττα.
 - i) Με πόσους τρόπους μπορεί μια ομάδα να συγκεντρώσει 40 βαθμούς αν δεν έχει σημασία η σειρά των αποτελεσμάτων;
 - ii) Με πόσους τρόπους μπορεί η ομάδα να συγκεντρώσει 18 βαθμούς στις 18 αγωνιστικές του πρώτου γύρου αν δεν έχει σημασία η σειρά των αποτελεσμάτων και θέλει να κάνει περισσότερες ισοπαλίες από ήττες;
- 18) Αποδείξτε προσεκτικά τους γνωστούς τύπους των συνδυασμών χωρίς και με επανάληψη με την βοήθεια γεννητριών συναρτήσεων (δείτε την διαφάνεια της σελίδας 6 του 10^{ου} μαθήματος).
- 19) Σε ένα ράφι ενός σούπερ-μάρκετ βρίσκονται 8 κονσέρβες ενός είδους, 12 ενός δεύτερου και 10 ενός τρίτου. Όλες οι κονσέρβες αγοράστηκαν από δύο πελάτες έτσι ώστε κάθε ένας πήρε 2 τουλάχιστον από κάθε είδος και 15 κονσέρβες συνολικά. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε την δύναμη του x ο συντελεστής της οποίας δίνει τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να γίνει αυτή η αγορά.
- 20) 100 άνθρωποι (που θεωρούνται μη διακεκριμένοι) βρίσκονται σε ένα τραίνο και πρόκειται να κατέβουν όλοι στις 4 επόμενες στάσεις. Δώστε γεννήτρια συνάρτηση και επισημάνετε την δύναμη του x της οποίας ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των τρόπων που μπορεί να γίνει αυτό, όταν:

- i) δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των επιβατών που κατεβαίνουν σε κάθε στάση.
- ii) γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των επιβατών που θα κατέβουν στην δεύτερη στάση είναι μεγαλύτερος ή ίσος του αριθμού των επιβατών που θα κατέβουν στην πρώτη και μικρότερος ή ίσος αυτών που θα κατέβουν στην τρίτη στάση.
- iii) Βρείτε τους παραπάνω συντελεστές

21) Στις παρακάτω προτάσεις αναφέρονται οι γεννήτριες συναρτήσεις απλών προβλημάτων απαρίθμησης.

- i) Ο συντελεστής του x^k στην παράσταση $x^r(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των υποσυνόλων με $(k-r)$ στοιχεία ($k \geq r$) ενός n -μελους συνόλου
- ii) Ο συντελεστής του $x^k/k!$ στην παράσταση $(1+x)^n$ δίνει τον αριθμό των διατάξεων k αντικειμένων από n
- iii) Η παράσταση $(1-x)^{-1}$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $a_i = 1, i = 0, 1, 2, \dots$

(Απ. Σ-Σ-Σ)

22) Θέλουμε να τοποθετήσουμε στη σειρά n πράσινους βόλους και m κόκκινους βόλους ($m \leq n$) ώστε να υπάρχει τουλάχιστον ένας πράσινος βόλος ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κόκκινων βόλων (η αρχή και το τέλος της σειράς θεωρούνται διακεκριμένα). Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τον αριθμό των διαφορετικών τοποθετήσεων.