ΘΕΩΡΗΜΑ: $H =$ Hilbert, $P \in B(H)$, $P \neq 0$, $P^2 = P$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$

(ii) $\|P\| = 1$

(iii) $P =$ θετικός, δηλ. $\langle P(x), x\rangle \geq 0 \ \forall x$

(iv) $P =$ αυτοσυζυγής

(v) $P =$ φυσιολογικός

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

- Έστω $M = \operatorname{Im} P =$ κλειστός υπόχωρος του H
- Θέτω $P_M : H \to M$, $P_M(x) = z$ αν $x = z + y \in M \oplus M^{\perp} = H$
- Επειδή $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P \Rightarrow H = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$, $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Im} P^{\perp}$.
- Έχω $P_M(P(x)) = P(x)$ διότι $P(x) \in \operatorname{Im} P = M$
- Επίσης $P_M((I-P)(x)) = 0$ διότι $(I-P)(x) \in M^{\perp}$

Άρα $P_M(x) = P_M(P(x) + (I-P)(x)) = P_M(P(x)) + P_M((I-P)(x)) =$
$= P(x) + 0 = P(x)$

- Άρα $P_M = P \Rightarrow \|P\| = \|P_M\| = 1$

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Έστω $P(x) \perp (I-P)(x)$, άρα

$\langle P(x), (I-P)(x)\rangle = 0 \Rightarrow \langle P(x), x\rangle = \langle P(x), P(x)\rangle \geq 0$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Αφού $\langle P(x), x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle P(x), x \rangle \in \mathbb{R} \ \forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow P = P^*$

(iv) $\Rightarrow$ (v)

$P^*P = PP = PP^* \Rightarrow P =$ φυσιολογικός

(v) $\Rightarrow$ (i)

Αν $P =$ φυσιολογικός $\Rightarrow \|P(x)\| = \|P^*(x)\| \ \forall x \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^*$

Αν $x \in \operatorname{Ker} P$, $y = P(z) \in \operatorname{Im} P$ τότε

$$\langle x, y \rangle = \langle x, P(z) \rangle = \langle P^*(x), z \rangle \overset{x \in \operatorname{Ker} P^*}{=\!=\!=} \langle 0, z \rangle = 0$$

Άρα $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Im} P$

Έχω δείξει την ισοδυναμία (i) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) $\Leftrightarrow$ (v)

(ii) $\Rightarrow$ (i)

- Έστω $\|P\| \leq 1$ και $M = \operatorname{Im} P$, $N = \operatorname{Ker} P$

- $\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } x \in N^{\perp} \\ (I-P)(x) \in \operatorname{Ker} P = N \end{array}\right\} \Rightarrow x \perp (I-P)(x)$

- Άρα $\|x\|^2 + \|(I-P)(x)\|^2 = \|x - (I-P)(x)\|^2 = \|P(x)\|^2 \leq \|x\|^2$

- Συνεπώς $\|(I-P)(x)\| = 0 \Rightarrow (I-P)(x) = 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow x = P(x) \in M$

- Δηλαδή $N^{\perp} \subseteq M$ (1)

- Θα δ.ο. $M \subseteq N^{\perp}$ αν

  $M \not\subseteq N^{\perp}$, $\exists\, x \in M$ και $y \in N$: $\langle x, y \rangle \neq 0$

- Αφού $x \in \operatorname{Im} P \Rightarrow P(x) = x$, άρα

$$0 \neq \langle x, y \rangle = \langle P(x), y \rangle = \langle x, P^*(y) \rangle \overset{(iv)}{=} \langle x, P(y) \rangle = \overset{y \in \operatorname{Ker} P}{=} \langle x, 0 \rangle = 0$$

- Άτοπο, άρα $M \subseteq N^\perp$ ②

- Από ①, ② $\Rightarrow M = N^\perp \Rightarrow \operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$. $\square$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω H = χώρος Hilbert και $P \in B(H)$ που ικανοποιεί το προηγούμενο θεώρημα. Τότε η P λέγεται ορθογώνια προβολή επί του $M = \operatorname{Im} P$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω $P, Q \in B(H)$ ορθογώνιες προβολές. Λέμε ότι $P \leq Q$ αν $P(H) \subseteq Q(H)$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Ισχύει $P \leq Q$ αν $\langle P(x), x \rangle \leq \langle Q(x), x \rangle \ \forall x \in H$

<u>Απόδειξη:</u>

$\boxed{\Rightarrow}$

- Έστω $P \leq Q \Rightarrow QP(x) = P(x)$ διότι $P(x) \in Q(H)$
- Άρα $QP = P \Rightarrow PQ = (Q^* P^*)^* = (QP)^* = P^* = P$
- Έχω

$$\langle P x, x \rangle = \langle P^2 x, x \rangle = \langle Px, Px \rangle = \|Px\|^2 = \|PQ(x)\|^2 \leq$$

$$\leq \|Q(x)\|^2 = \langle Q(x), x \rangle$$

$\boxed{\Leftarrow}$

- Έστω $\langle P(x), x \rangle \leq \langle Q(x), x \rangle \ \forall x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|P(x)\| \leq \|Q(x)\| \ \forall x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|P(x)\| = \|P(P(x))\| \leq \|QP(x)\| \leq \|P(x)\|$$

(9B)

Άρα $\|Qp(x)\| = \|p(x)\| \ \forall x$ (1)

- Έχω $\|Qp(x)-p(x)\|^2 = \|Qp(x)\|^2 - \langle Qp(x), p(x)\rangle - \langle p(x), Qp(x)\rangle +$

$+ \|p(x)\|^2 = 2\|p(x)\|^2 - \langle Qp(x), Qp(x)\rangle - \langle Qp(x), Qp(x)\rangle =$

$= 2\|p(x)\|^2 - 2\|Qp(x)\|^2 \overset{(1)}{=} 0$

- Άρα $Qp(x) = p(x) \ \forall x \in H$

- Αν $x \in p(H) \Rightarrow x = p(z) = Qp(z) \in Q(H)$

Άρα $p(H) \subseteq Q(H) \Rightarrow p \leq Q$ □

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Αν $(Q_n)\uparrow$ αύξουσα ορθογώνιων προβολών τότε αυτή συγκλίνει κατά σημείο σε ορθογώνια προβολή $Q = Q(M)$ όπου $M = \overline{\bigcup_n Q_n(H)}$

<u>Απόδειξη:</u>

- Έστω $x \in H$, $\epsilon > 0$, επειδή $Q(x) \in M$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, $y \in Q_{n_0}(H)$: $\|Q(x) - y\| < \epsilon$

- Αν $n \geq n_0 \Rightarrow Q \geq Q_n \geq Q_{n_0}$

Άρα $Q_n Q(x) = Q_n(x)$, $Q_n(y) = Q_{n_0}(y) = y$. Άρα

$\|Q_n(x) - y\| = \|Q_n Q(x) - Q_n(y)\| \leq \|Q_n\| \|Q(x) - Q_n(y)\| \leq$

$\leq \|Q(x) - y\| < \epsilon$

- Έχω

$\|Q(x) - Q_n(x)\| \leq \|Q(x) - y\| + \|y - Q_n(x)\| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Άρα $\lim_n Q_n(x) = Q(x) \ \forall x \in H$ □

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ ακολουθία ορθογωνίων προβολών ανά δύο κάθετες δηλ. $P_n(H) \perp P_m(H)$, $n \neq m$.

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ συγκλίνει $\forall x \in H$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) = P(M)(x), \quad M = \overline{\left[\bigcup_n P_n(H)\right]}$$

επίσης $\|P(M)(x)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(x)\|^2$

Απόδειξη:

- Έστω $Q_n = \sum_{k=1}^{n} P_k \Rightarrow (Q_n) \uparrow$
- Από την προηγούμενη πρόταση η (Q_n) συγκλίνει κατά σημείο στην προβολή $P(M)$ όπου
  $$M = \overline{\bigcup_n Q_n(H)} = \overline{\left[\bigcup_n \operatorname{Im} P_n\right]}$$
- Έχουμε $Q_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x) \Rightarrow \|Q_n(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|P_k(x)\|^2$. Άρα

$$\|P(M)(x)\|^2 = \lim_n \|Q_n(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k(x)\|^2 \quad \square$$

Συμπαγείς Τελεστές

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> E, F = χώροι Banach $T: E \to F$ γραμμικός

Λέμε ότι ο T είναι συμπαγής αν $\overline{T(B_E)}$ = συμπαγές στον F

<u>Παρατήρηση:</u> Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος

<u>Απόδειξη:</u>

$\overline{T(B_E)}$ = συμπαγές $\Rightarrow$ $\overline{T(B_E)}$ = φραγμένο $\Rightarrow$ $\exists\, M>0$:

$\overline{T(B_E)} \subseteq B(0,M) \Rightarrow \|T(x)\| \leq M \quad \forall x: \|x\| \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|T\| \leq M$

<u>ΛΗΜΜΑ:</u> A = υποσύνολο μετρικού χώρου X.

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) A = συμπαγές

(ii) A = ακολουθιακά συμπαγές

(iii) A = αριθμήσιμα συμπαγές, δηλ. κάθε αριθμήσιμο ανοικτό κάλυμμά του έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα

(iv) Κάθε άπειρο υποσύνολο του A έχει σημείο συσσώρευσης που ανήκει στο A

(v) A = πλήρες και ολικά φραγμένο

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u>

E, F = χώροι Banach, $T: E \to F$ γραμμικός

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) T = συμπαγής

(ii) $\forall\, A \subseteq E$ φραγμένο, $\overline{T(A)}$ = συμπαγές

(iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n) \subseteq E$,
η ακολουθία $(T(x_n))$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία

(iv) Το $T(B_E)$ = ολικά φραγμένο

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Έστω A = φραγμένο $\Rightarrow \exists\, r>0 : A \subseteq r B_E \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \overline{T(A)} \subseteq r\, \overline{T(B_E)} \\ \overline{T(B_E)} = \text{συμπαγές} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{T(A)} = \text{συμπαγές}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Έστω $\{x_n : n\in\mathbb{N}\} \subseteq E$ φραγμένη ακολουθία $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\{T(x_n) : n\in\mathbb{N}\}}$ = συμπαγές

Τότε η $(T(x_n))$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

- Αν το $T(B_E)$ όχι ολικά φραγμένο, $\exists\, \varepsilon>0$ ώστε το $T(B_E)$ να μην καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπαλών της μορφής $B(T(x), \varepsilon)$
- Έστω $x_1 \in B_E \Rightarrow B(T(x_1), \varepsilon)$ δεν καλύπτει το $T(B_E)$

  άρα $\exists\, x_2 \in B_E : \|T(x_2) - T(x_1)\| \geq \varepsilon$
- Το $B(T(x_1),\varepsilon) \cup B(T(x_2),\varepsilon)$ δεν καλύπτει το $T(B_E)$

  άρα $\exists\, x_3 \in B_E : \|T(x_3) - T(x_2)\| \geq \varepsilon$

  $\|T(x_3) - T(x_1)\| \geq \varepsilon$
- Συνεχίζω επαγωγικά και βρίσκω ακολουθία $(x_n) \subseteq B_E$

  με $\|T(x_m) - T(x_n)\| \geq \varepsilon \quad \forall\, m \neq n \quad (A)$

• Επειδή η (x_n) φραγμένη από υπόθεση η $(T(x_n))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άτοπο από (A)

(iv) $\Rightarrow$ (i)

• Θέλω να δ.ο. $\overline{T(B_E)}$ = συμπαγές

• Το $\overline{T(B_E)}$ κλειστό υποσύνολο του πλήρους χώρου F

άρα $\overline{T(B_E)}$ = πλήρες

• Αρκεί να δ.ο. $\overline{T(B_E)}$ = ολικά φραγμένο

• Έστω $\varepsilon>0$, αφού $T(B_E)$ = ολικά φραγμένο,

$\exists\, x_1,\dots,x_n \in B_E$ ώστε

$$T(B_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(T(x_i), \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{T(B_E)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(T(x_i),\varepsilon)$$

• Πράγματι, αν $y \in \overline{T(B_E)}$, $\exists\, x \in B_E$: $\|y-T(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$T(x) \in \overline{T(B_E)} \Rightarrow \exists\, i$: $\|T(x)-T(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|y-T(x_i)\| < \varepsilon \Rightarrow y \in B(T(x_i),\varepsilon)$

Άρα $\overline{T(B_E)} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(T(x_i),\varepsilon)$ □

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> E, F = Banach, $T: E \to F$ συμπαγής

Αν $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \|T(x_n)-T(x)\| \to 0$

<u>Απόδειξη:</u>

• Αρκεί να δ.ο. $x_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow \|T(x_n)\| \to 0$

• Έστω $\|T(x_n)\| \not\to 0$, τότε $\exists\, \varepsilon>0$; και

υπακολουθία (x_{k_n}): $\|T(x_{k_n})\| \geq \varepsilon$ $\forall n$

• Επειδή T = συμπαγής, (x_n) = φραγμένη $\exists$ υπακολουθία (x_{k_n}): $T(x_{k_n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} y$

Άρα $\|y\| \geq \epsilon$ (1)

• Έστω $y^* \in F^*$ τότε

$$y^*(y) = \lim_n y^*(T(x_{k_n})) = \lim_n (y^* \circ T)(x_{k_n})$$

Αλλά $x_{k_n} \xrightarrow{w} 0$ $\Big\} \Rightarrow$

$y^* \circ T \in E^* \Rightarrow y^* \circ T$ = συνεχής

$\Rightarrow y^*(y) = 0 \quad \forall y^* \in E, \Rightarrow y = 0$. Άτοπο από (1) □

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> H = Hilbert $\Rightarrow H$ = αυτοπαθής

<u>Απόδειξη:</u>

• Ορίζω $T: H \to H^*$, $T(x)(y) = \langle y, x \rangle$

• Από Θεώρημα Riesz η T = ισομετρία επί

• επίσης T = αντιγραμμική δηλ. $T(\lambda x) = \bar{\lambda}\, T(x)$

Έχω $\|T(x)\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle \quad \forall x \in H$ (1)

• Ορίζω $\langle , \rangle'$ στον H^*,

$$\langle T(x), T(y) \rangle' = \overline{\langle x, y \rangle}$$

Τότε $\langle , \rangle'$ = εσωτερικό γινόμενο στον H^* και λόγω της (1) επάγει την νόρμα του H^*

• Άρα H^* = χώρος Hilbert

• Ορίζω $S: H^* \to H^{**}$ όπου, $S(x^*)(y^*) = \langle y^*, x^* \rangle$

Η S = ισομετρία επί

- Έστω $J: H \longrightarrow H^{**}$ η κανονική εμφύτευση.
  Αρκεί να δ.ο. J = επί. Αρκεί $J = S \circ T$

- Έστω
  $S \circ T(x)(y^*) = S(T(x))(y^*) = \langle y^*, T(x) \rangle' = \langle x, y \rangle$ όπου $T(y) = y^*$

- Επίσης, $J(x)(y^*) = y^*(x) = T(y)(x) = \langle x, y \rangle$
  Άρα $S \circ T(x)(y^*) = J(x)(y^*)$ $\forall x, y^* \Rightarrow S \circ T(x) = J(x)$ $\forall x \Rightarrow S \circ T = J$ □

ΛΗΜΜΑ: Κάθε φραγμένη ακολουθία σε χώρο Hilbert H έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία

Απόδειξη:

- Έστω $(x_n) \subseteq B_H$
- Θέτω $H_0 = \overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]} \Rightarrow H_0$ = διαχωρίσιμος χώρος Hilbert
- Επειδή H_0 = διαχωρίσιμος, $(B_{H_0^*}, w^*)$ = συμπαγής + μετρικοποιήσιμος

Ορίζω $T: H_0 \longrightarrow H_0^*$, $T(x)(y) = \langle y, x \rangle$ = ισομετρία επί

Άρα $T(B_{H_0}) = B_{H_0^*}$

Αν $(x_j) \subseteq H_0$, $x_j \xrightarrow{w} x \Rightarrow \langle y, x_j \rangle \to \langle y, x \rangle$ $\forall y \Rightarrow$
$\Rightarrow T(x_j)(y) \to T(x)(y)$ $\forall y \Rightarrow T(x_j) \xrightarrow{w^*} T(x)$

- Άρα $T\big|_{B_{H_0}}: (B_{H_0}, w) \longrightarrow (B_{H_0^*}, w^*)$ ομοιομορφισμός

Άρα (B_{H_0}, w) = μετρικοποιήσιμος, συμπαγής
Επειδή $(x_n) \subseteq B_{H_0}$ η (x_n) έχει
συγκλίνουσα υπακολουθία
□

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> H = Hilbert, F = Banach, $T: H \to F$ γραμμικός

Ο T = συμπαγής αν $\forall$ ακολουθία $(x_n) \subseteq H$ ισχύει

$$x_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow \|T(x_n)\| \to 0$$

<u>Απόδειξη:</u>

$\boxed{\Rightarrow}$

Αυτό έχει δειχθεί

$\boxed{\Leftarrow}$

Αρκεί να δ.ο (x_n) = φραγμένη ακολουθία τότε η $T(x_n)$ έχει νορμ συγκλίνουσα υπακολουθία

Από το λήμμα $\exists$ υπακολουθία (x_{k_n}): $x_{k_n} \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|T(x_{k_n}) - z\| \to 0$ από υπόθεση

Άρα $(T(x_{k_n}))$ συγκλίνει νορμ $\Rightarrow T$ = συμπαγής □

<u>ΛΗΜΜΑ:</u> H = Hilbert, F = Banach, $T: H \to F$ φραγμ. γραμμικός τελεστής. Τότε $T(B_H)$ = κλειστό του F

<u>Απόδειξη:</u>

- Έστω $y \in \overline{T(B_H)} \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq B_H : \|T(x_n) - y\| \to 0$
- Η (x_n) = φραγμένη ακολουθία και από αυτοπάθεια συγκλίνουσα υπακολουθία, $x_{k_n} \xrightarrow{w} x$

  Τότε $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \lim_n \langle x_{k_n}, x\rangle \le \|x\|$

  Άρα $\|x\| \le 1 \Rightarrow x \in B_H$
- Αρκεί να δ.ο $T(x) = y$, διότι τότε $y \in T(B_H)$

• Έστω $y^\wedge \in F^\wedge \Rightarrow y^\wedge \circ T \in H^\wedge$, $x_{k_n} \xrightarrow{w} x$ $\Bigg\} \Rightarrow y^\wedge \circ T(x_{k_n}) \to y^\wedge \circ T(x)$ (1)

Έστω $T(x_{k_n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} y \Rightarrow y^\wedge(T(x_{k_n})) \to y^\wedge(y)$ (2)

• Από (1), (2) $\Rightarrow y^\wedge(y) = y^\wedge(T(x))$ $\forall y^\wedge \in F^\wedge \Rightarrow y = T(x)$ □

<u>Θεώρημα:</u> H = χώρος Hilbert, $T: H \to H$ γραμμική

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) T = συμπαγής

(ii) $T(B_H)$ = ολικά φραγμένο

(iii) $T(B_H)$ = συμπαγές

(iv) $\forall\, x_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow \|T(x_n)\| \to 0$

<u>Απόδειξη:</u>

(i) $\Leftrightarrow$ (iv) έχει δειχθεί

(i) $\Rightarrow$ (iii)

• T = συμπαγής $\Rightarrow \overline{T(B_H)}$ = συμπαγές; Λήμμα $\Rightarrow \overline{T(B_H)} = T(B_H)$ $\Bigg\} \Rightarrow T(B_H)$ = συμπαγές

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Προφανές

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω $T(B_H)$ = ολικά φραγμένο; Από Λήμμα $T(B_H)$ = κλειστό $\Rightarrow T(B_H)$ = πλήρες $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow T(B_H)$ = συμπαγές $\Rightarrow$ T = συμπαγής τελεστής □