<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω $(H, \langle , \rangle)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\emptyset \neq A \subseteq H$, ορίζουμε:

$$A^{\perp} = \{ x \in H : \langle x, \alpha \rangle = 0 \ \forall \alpha \in A \}$$

<u>Παρατήρηση:</u> $A^{\perp}$ = κλειστός υπόχωρος του $H$

<u>Απόδειξη:</u>

Για κάθε $\alpha \in A$, ορίζουμε $\Lambda_\alpha : H \to \mathbb{F}$, $\Lambda_\alpha(x) = \langle x, \alpha \rangle$

Η $\Lambda_\alpha$ = γραμμική και συνεχής, παρατηρώ

$$A^{\perp} = \{ x \in H : \Lambda_\alpha(x) = 0 \ \forall \alpha \in A \} = \bigcap_{\alpha \in A} \ker \Lambda_\alpha$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Αν $M$ = κλειστός υπόχωρος του $H$, τότε $H = M \oplus M^{\perp}$

<u>Απόδειξη:</u>

- Έστω $y \in H \Rightarrow \begin{cases} y_1 = P_M(y) \in M \\ y - P_M(y) \in M^{\perp} \end{cases} \Rightarrow y = P_M(y) + (y - P_M(y)) \in M + M^{\perp}$.

- Έστω $z \in M \cap M^{\perp} \Rightarrow \langle z, z \rangle = 0 \Rightarrow z = 0$

- Άρα $H = M \oplus M^{\perp}$. □

<u>ΛΗΜΜΑ:</u> Έστω $M$ = κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert $H$.

Τότε $P_M : H \to H$, $x \to P_M(x)$ είναι γραμμική + συνεχής

<u>Απόδειξη:</u>

<u>Γραμμικότητα:</u> Έστω $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $z = x + \lambda y$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } x = x_1 \oplus x_2 \in M \oplus M^{\perp} \\ y = y_1 \oplus y_2 \in M \oplus M^{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = (x_1 + \lambda y_1) \oplus (x_2 + \lambda y_2) \in M \oplus M^{\perp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_M(z) = x_1 + \lambda y_1 = P_M(x) + \lambda P_M(y)$$
□

**Συνέπεια**

Τα διανύσματα $P_M(x)$, $x - P_M(x)$ = κάθετα, άρα

$$\|x\|^2 = \|(x - P_M(x)) + P_M(x)\|^2 = \|x - P_M(x)\|^2 + \|P_M(x)\|^2 \geq \|P_M(x)\|^2$$

Άρα $\|P_M(x)\| \leq \|x\|$ $\forall x \in H$ □

**ΛΗΜΜΑ:** Έστω $(E, <,>)$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$,

$$f_x : E \to \mathbb{F}, \quad f_x(y) = \langle y, x \rangle$$

Τότε $f_x \in E^*$, $\|f_x\| = \|x\|$

**Απόδειξη**

- Προφανώς $f_x$ = γραμμική
- Αν $x = 0 \Rightarrow \|f_x\| = \|x\| = 0$
- Αν $x \neq 0$ έχω

$$|f_x(y)| = |\langle y, x \rangle| \leq \|y\| \|x\| \quad \forall y \Rightarrow \|f_x\| \leq \|x\| \quad (1)$$

- Επίσης $\left\| f_x\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \frac{\langle x, x \rangle}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$, $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f_x\| \geq \|x\| \quad (2)$$

- Από (1), (2) $\Rightarrow \|f_x\| = \|x\|$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ (Riesz) Εστω $H$ = χώρος Hilbert και $f \in H^*$.
Τοτε υπαρχει μοναδικο $x \in H$: $f(y) = \langle y, x \rangle \;\; \forall y \in H$

Απόδειξη:

· Υπαρξη:

· Αν $f = 0$ παιρνω $x = 0$.

Εστω $f \neq 0 \Rightarrow M = \ker f$ γνήσιος υπόχωρος του $H$

· Αρα $\exists\, z \perp M$, $z \neq 0$, για καθε $y \in H$, εχω

$$f(f(z)y - f(y)z) = 0 \Rightarrow f(z)y - f(y)z \in M$$

$$\text{Αρα } \langle f(z)y - f(y)z, z \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z)\langle y, z\rangle = f(y)\langle z, z\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y)\langle z, z\rangle = \langle y, \overline{f(z)}\, z\rangle \Rightarrow f(y) = \langle y, \frac{\overline{f(z)}}{\langle z,z\rangle} z\rangle$$

· Θετω $x = \dfrac{\overline{f(z)}}{\langle z, z\rangle} z$ και εχω $f(y) = \langle y, x\rangle \;\; \forall y \in H$

Μοναδικότητα:

Εστω $f(y) = \langle y, x_1\rangle = \langle y, x_2\rangle \;\; \forall y \in H \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle y, x_1 - x_2\rangle = 0 \;\; \forall y \in H \Rightarrow \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Εστω $E$ = χωρος με εσωτερικό γινόμενο
Η οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική

βαση του $E$ αν

$\to$ Ειναι ορθοκανονική

$\to$ $E = \overline{[e_i : i \in I]}$

**ΠΡΟΤΑΣΗ:** Κάθε διαχωρίσιμος χώρος με εσωτερικό γινόμενο $E$ περιέχει μια ορθοκανονική βάση.

**Απόδειξη:**

· Έστω $X=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ με $\overline{X}=E$

Παραλείποντας διαδοχικά εκείνα τα $x_n$ που είναι γραμμικά εξαρτημένα από τα προηγούμενα $x_k$, $k<n$,

βρίσκω ένα αριθμήσιμο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο $Y$ του $E$ ώστε $[Y]=[X]$

· Από την διαδικασία ορθοκανονικοποίησης Gram Schmidt $\exists$ ορθοκανονική ακολουθία $\{e_k : k\in\mathbb{N}\}$ ώστε

$$[e_1,\dots,e_k]=[y_1,\dots,y_k],\ k\in\mathbb{N} \text{ όπου } y_i\in Y\ \forall i$$

· Άρα $E=\overline{[e_n : n\in\mathbb{N}]}$ □

**ΘΕΩΡΗΜΑ:** Έστω $\{e_n : n\in\mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση στον χώρο $(E,\langle\,,\rangle)$ και $x\in E$. Τότε

(i) $x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle e_n$

(ii) $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,e_n\rangle|^2$ (Ταυτότητα Parseval)

**Απόδειξη:**

· Έστω $\epsilon>0$, αφού $E=\overline{[e_n : n\in\mathbb{N}]}$, υπάρχουν $n\in\mathbb{N}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{F}$ ώστε

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\|<\epsilon$$

· Έχουμε δε $\|x-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\|^2\geq\|x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\|^2=$

$$=\|x\|^2+\|\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\|^2-\langle x,\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\rangle-\langle\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k,x\rangle=$$

$$= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k\rangle}\langle x, e_k\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

· Άρα $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 < \varepsilon^2$

· Αν $m > n$ έχω·

$$\|x - \sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m}|\langle x, e_k\rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 < \varepsilon^2$$

· Άρα $\lim_m \sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle e_k = x \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty}\langle x, e_k\rangle e_k$

· Επίσης $\|x\|^2 = \lim_m \|\sum_{k=1}^{m}\langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \lim_m \sum_{k=1}^{n}|\langle x, e_k\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2$ □

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ:</u> Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ = ορθοκανονική βάση του χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(E, \langle , \rangle)$ και $x, y \in E$, τότε

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}$$

<u>Απόδειξη:</u>

Αν $x_N = \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n \Rightarrow x_N \to x$

Άρα $\langle x, y\rangle = \lim_N \langle \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle e_n, y\rangle = \lim_N \sum_{n=1}^{N}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, e_n\rangle\langle e_n, y\rangle$$ □

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2$

**Απόδειξη:**

- Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του $H$
  και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\ell^2$

- Ορίζω $U : H \to \ell^2$, $U(x) = (\langle x, x_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$

- Η $U$ καλά ορισμένη και ισομετρία διότι

$$\|U(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

- Αρκεί να δ.ο. $U =$ επί

$$U(H) = U\left(\overline{[x_n : n \in \mathbb{N}]}\right) = \overline{[U(x_n) : n \in \mathbb{N}]} = \overline{[e_n : n \in \mathbb{N}]} = \ell^2 \quad \square$$

## Τελεστές σε χώρους Hilbert

- Από εδώ και πέρα όλοι οι χώροι με εσωτερικό γινόμενο θεωρούνται μιγαδικοί

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω $H$ = χώρος Hilbert και $\phi: H \times H \to \mathbb{C}$

Η $\phi$ λέγεται sesquilinear μορφή αν

(1) $\phi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y) \ \forall x_1, x_2, y \in H, \lambda \in \mathbb{C}$

(2) Η απεικόνιση $H \to \mathbb{C}$, $y \to \overline{\phi(x,y)}$ γραμμική $\forall x$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Μια sesquilinear μορφή $\phi: H \times H \to \mathbb{C}$ λέγεται φραγμένη αν $\sup\{|\phi(x,y)| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} = \|\phi\| < +\infty$

<u>Παράδειγμα:</u>
Αν $T \in B(H)$, $\phi_T : H \times H \to \mathbb{C}$, $\phi_T(x,y) = \langle T(x), y \rangle$

είναι sesquilinear μορφή και $\|\phi_T\| \le \|T\|$.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u>
$(H, \langle , \rangle)$ = χώρος Hilbert $\phi: H \times H \to \mathbb{C}$ φραγμένη sesquilinear μορφή. Τότε

(1) Υπάρχει μοναδικός $T \in B(H)$ ώστε $\phi(x,y) = \langle T(x), y \rangle$

(2) $\|\phi\| = \|T\|$

<u>Απόδειξη:</u>

- Έστω $x \in H$, ορίζω $f_x : H \to \mathbb{C}$, $f_x(y) = \overline{\phi(x,y)}$
- Η $f_x$ = γραμμική και φραγμένη, άρα από το Θεώρημα Riesz υπάρχει μοναδικό $z_x \in H$ ώστε

$$f_x(y) = \langle y, z_x \rangle$$

• Ορίζω $T: H \longrightarrow H$, $T(x) = z_x$

→ $T$ = καλά ορισμένη διότι αν $x_1 = x_2 \Rightarrow z_{x_1} = z_{x_2}$

→ Η $T$ ικανοποιεί

$$\langle T(x), y\rangle = \langle z_x, y\rangle = \overline{f_x(y)} = \phi(x,y) \quad \forall x,y \in H$$

→ Η $T$ = γραμμική διότι

$$\langle T(\lambda x_1 + x_2), y\rangle = \phi(\lambda x_1 + x_2, y) = \lambda \phi(x_1,y) + \phi(x_2,y) =$$

$$= \lambda\langle T(x_1),y\rangle + \langle T(x_2),y\rangle = \langle \lambda T(x_1)+T(x_2), y\rangle \quad \forall y$$

Άρα $T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T(x_1) + T(x_2)$

→ Η $T$ = φραγμένη

• Έστω $x \in H$: $\|x\| \le 1$, τότε

$$\|T(x)\| = \sup\{|\langle T(x),y\rangle| : \|y\|\le 1\} = \sup\{|\phi(x,y)| : \|y\| \le 1\} \le$$

$$\le \sup\{|\phi(z,y)| : \|z\|\le 1, \|y\|\le 1\} \le \|\phi\|$$

Άρα $\|T\| \le \|\phi\|$ (1)

Παρατηρώ ότι $\phi_T = \phi$ και γνωρίζω ότι $\|\phi_T\| \le \|T\|$ (2)

Από (1), (2) $\Rightarrow \|T\| = \|\phi\|$

→ Η $T$ = μοναδική

Αν $S, T \in B(H)$ ώστε $\phi(x,y) = \langle T(x),y\rangle = \langle S(x),y\rangle \quad \forall x,y \Rightarrow$

$$\Rightarrow T(x) = S(x) \quad \forall x \Rightarrow T = S$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $\phi$ = sesquilinear μορφή, ορίζω

$$\hat\phi: H \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \hat\phi(x) = \phi(x,x)$$

• Θέτω $\|\hat{\phi}\| = \sup\{|\hat{\phi}(x)| : \|x\| \le 1\}$

και παρατηρώ ότι $|\hat{\phi}(x)| \le \|\hat{\phi}\| \, \|x\|^2$

<u>ΛΗΜΜΑ:</u> $\|\hat{\phi}\| \le \|\phi\| \le 2\|\hat{\phi}\|$

(Άρα $\|\phi\| < +\infty \iff \|\hat{\phi}\| < +\infty$)

<u>Απόδειξη:</u>

• Έχω $\sup\{|\phi(x,x)| : x \in H, \|x\| \le 1\} \le \sup\{|\phi(x,y)| \; \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\}$

Άρα $\|\hat{\phi}\| \le \|\phi\|$

• Polarization identity:

$4\phi(x,y) = \phi(x+y,x+y) - \phi(x-y,x-y) + i\,\phi(x+iy,x+iy) - i\,\phi(x-iy,x-iy)$

Άρα

• $4|\phi(x,y)| \le |\hat{\phi}(x+y)| + |\hat{\phi}(x-y)| + |\hat{\phi}(x+iy)| + |\hat{\phi}(x-iy)| \le$

$\le \|\hat{\phi}\| \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right) =$

$= \|\hat{\phi}\| \left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|iy\|^2\right) = 4\|\hat{\phi}\|(\|x\|^2 + \|y\|^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow |\phi(x,y)| \le \|\hat{\phi}\| (\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad \forall x : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |\phi(x,y)| \le 2\|\hat{\phi}\| \quad \forall x : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1 \Rightarrow \|\phi\| \le 2\|\hat{\phi}\|$

□

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> $(H, \langle\,,\rangle)$ = χώρος Hilbert, $T : H \to H$ γραμμική

(i) $T$ = φραγμένη $\iff \sup\{|\langle T(x), x\rangle| : \|x\| \le 1\} < +\infty$

(ii) $\sup\{|\langle T(x), x\rangle| : \|x\| \le 1\} \le \|T\| \le 2\sup\{|\langle T(x), x\rangle| : \|x\| \le 1\}$

<u>Απόδειξη:</u>

(c) Έχω:

$T = $ φραγμένη $\Leftrightarrow \phi_T = $ φραγμένη $\Leftrightarrow \hat{\phi}_T = $ φραγμένη $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sup\{|\langle T(x),x\rangle| : \|x\| \leq 1\} < +\infty$

(d) Έχουμε $\left.\begin{matrix}\|\hat{\phi}_T\| \leq \|\phi_T\| \leq 2\|\hat{\phi}_T\| \text{ και} \\ \|\phi_T\| = \|T\|\end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Συμπέρασμα □

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ:</u> Αν $T \in B(H)$ και $\langle T(x),y\rangle = \langle x,T(y)\rangle \ \forall x,y \in H$

Τότε $\|T\| = \sup\{|\langle T(x),x\rangle| : \|x\| \leq 1\}$

<u>Απόδειξη:</u>

- Έστω $\phi(x,y) = \langle T(x),y\rangle$ τότε $\|T\| = \|\phi\|$

  Άρα αρκεί να δ.ο. $\|\phi\| \leq \sup\{|\phi(x,x)| : \|x\| \leq 1\}$

  δηλ. ισοδύναμα $\|\phi\| \leq \|\hat{\phi}\|$

- Έστω $x \in H$ τότε

  $\hat{\phi}(x) = \langle T(x),x\rangle = \langle x,T(x)\rangle = \overline{\langle T(x),x\rangle} = \overline{\hat{\phi}(x)}$

  Άρα $\hat{\phi}(x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in H$ (1)

- Αν $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$, τότε

$$4\phi(x,y) = \underbrace{\hat{\phi}(x+y) - \hat{\phi}(x-y)}_{\in \mathbb{R}} + i\hat{\phi}(x+iy) - i\hat{\phi}(x-iy) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 4\,\mathrm{Re}\,\phi(x,y) = \hat{\phi}(x+y) - \hat{\phi}(x-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4|\mathrm{Re}\,\phi(x,y)| \leq |\hat{\phi}(x+y)| + |\hat{\phi}(x-y)| \leq$$

$\leq \|\hat{\phi}\| \left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \varepsilon \|\hat{\phi}\| \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

- Άρα $|Re\,\phi(x,y)| \leq \|\hat{\phi}\| \dfrac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2}$ (2)

- Έχω $|\phi(x,y)| = e^{i\theta}\phi(x,y) = \phi(e^{i\theta}x, y)$ (3)

- Από (2), (3) έπεται ότι

$$|\phi(x,y)| \leq \|\hat{\phi}\| \frac{\|e^{i\theta}x\|^2 + \|y\|^2}{2} \leq \|\hat{\phi}\|$$

- Άρα $\|\phi\| \leq \|\hat{\phi}\|$ $\square$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Έστω $(H, \langle\,,\rangle)$ χώρος Hilbert και $T \in B(H)$ τότε υπάρχει μοναδικός $T^* \in B(H)$ ώστε

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \quad \forall x, y \in H$$

<u>Απόδειξη:</u>

- Ορίζω $\phi: H \times H \to \mathbb{C}$, $\phi(x,y) = \langle x, T(y)\rangle$
- Η $\phi$ είναι sesquilinear μορφή, άρα υπάρχει μοναδικός $T \in B(H)$ ώστε $\phi(x,y) = \langle T^*(x), y\rangle \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \langle x, T(y)\rangle = \langle T^*(x), y\rangle \Leftrightarrow \langle T(y), x\rangle = \langle y, T^*(x)\rangle \quad \forall x, y \in H$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u>

Αν $T \in B(H)$ ονομάζω τον $T^*$ συζυγή (adjoint) του τελεστή $T$.