Πορισμα 1: Εστω X τλκ διαν χώρος.

Τοτε ο X^* διαχωρίζει τον X, αρα $X^* \neq \{0\}$

Απόδειξη:

- Εστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Ορίζω $A = \{x\}$, $B = \{y\}$.
- Τα A, B ειναι συμπαγή, άρα απο το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $\Lambda \in X^*$:
$$Re\,\Lambda(x) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\,\Lambda(y) \Rightarrow \Lambda(x) \neq \Lambda(y) \; \square$$

Πορισμα 2: Εστω X τλκ διαν χώρος, Y = κλειστός υπόχωρος του X και $x_0 \notin Y$.

Τοτε υπαρχει $\Lambda \in X^*$: $\Lambda|_Y = 0$, $\Lambda(x_0) \neq 0$

Απόδειξη:

- Θετω $A = \{x_0\} \Rightarrow A$ = συμπαγές + κυρτό
$$B = Y \Rightarrow B = \text{κλειστό} + \text{κυρτό}$$
- Απο το Θεώρημα Hahn-Banach, $\exists\, \Lambda \in X^*$:
$$Re\,\Lambda(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\,\Lambda(y) \quad \forall y \in Y \quad (1)$$
- Αν $\Lambda|_Y \neq 0 \Rightarrow \Lambda(Y) = \mathbb{C} \Rightarrow Re\,\Lambda(Y) = \mathbb{R}$. Ατοπο απο (1)

Αρα $\Lambda|_Y = 0$. $\square$

Πορισμα 3: Εστω X τλκ διαν. χώρος και Y = υπόχωρος του X, $f \in Y^*$.

Τοτε υπάρχει $\Lambda \in X^*$: $\Lambda|_Y = f$

Απόδειξη:

- Αν $f = 0$ ειναι προφανές. Εστω $f \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Ker} f = \text{κλειστό στην τοπολογία του } Y \\ Y = \text{κλειστό στον } X \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f =$ κλειστό στην τοπολογία του X,

- Επιλέγω $x_0 \in Y$: $f(x_0) = 1 \Rightarrow x_0 \notin \operatorname{Ker} f$
- Από το προηγούμενο λήμμα, $\exists\, \Lambda \in X^*$:

  $\Lambda(x_0) = 1$, $\Lambda(\operatorname{Ker} f) = 0$
- Έχω $Y = [x_0] \oplus \operatorname{Ker} f$, αν $y \in Y$, τότε

  $y = t x_0 + z$, $t \in \mathbb{F}$, $z \in \operatorname{Ker} f$, άρα

  $\Lambda(y) = t\,\Lambda(x_0) + \Lambda(z) = t = f(t x_0 + z) = f(y)$

  Άρα $\Lambda|_Y = f$ $\square$

Ασθενής τοπολογίες σε χώρους με νόρμα

Υπενθυμίσεις:

Εστω X = χώρος με νόρμα.

(i) (X, w) = ο X εφοδιασμένος με την ασθενή τοπολογία.

Αν $(x_j) \subseteq X$, $x \in X$, τότε

$$x_j \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x^*(x_j) \to x^*(x) \quad \forall x^* \in X^*$$

(ii) (X^*, w^*) = ο X^* εφοδιασμένος με την ασθενή-* τοπολογία

Αν $(x_j^*) \subseteq X^*$, $x^* \in X^*$, τότε

$$x_j^* \xrightarrow{w^*} x^* \Leftrightarrow x_j^*(x) \to x^*(x) \quad \forall x \in X$$

(iii) Ορίζουμε $J: X \to X^{**}$, $J(x)(x^*) = x^*(x)$.

Η J είναι ισομετρία. Αν η J επί του X^{**} ο X λέγεται αυτοπαθής.

Η $J: X \to J(X)$ είναι w-w^*-ομοιομορφισμός, διότι

$$x_j \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x^*(x_j) \to x^*(x) \ \forall x^* \in X^* \Leftrightarrow J(x_j)(x^*) \to J(x)(x^*) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J(x_j) \xrightarrow{w^*} J(x)$$

(iv) Αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$ τότε η (x_n) = φραγμένη

Απόδειξη:

Αφού $x_n \xrightarrow{w} x \overset{(iii)}{\Rightarrow} J(x_n) \xrightarrow{w^*} J(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow J(x_n)(x^*) \to J(x)(x^*) \quad \forall x^* \in X^*.$$

Εχω $\{J(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X^{**} = B(X^*, \mathbb{F})$ και

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |J(x_n)(x^*)| < +\infty \quad \forall x^* \in X^*$$

Άρα από την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος

$$\left.\begin{array}{l} \sup_n \|J(x_n)\| < +\infty \\ \text{Όμως } \|J(x_n)\| = \|x_n\| \ \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow \sup_n \|x_n\| < +\infty$$

(v) Αν $(x_n^*)_n \subseteq X^*$, $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ τότε η (x_n^*) = φραγμένη

Απόδειξη:

Έχω $x_n^*(x) \longrightarrow x^*(x)$ $\forall x \in X \Rightarrow \sup_n |x_n^*(x)| < +\infty$ $\forall x \in X$

Άρα από την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος,

$$\sup_n \|x_n^*\| < +\infty. \square$$

Άσκηση:

Έστω $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$, $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in \ell^p$

Δείξτε ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$, $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ και (e_n) δεν συγκλίνει νορμικά

ΛΗΜΜΑ:

Έστω X = γραμμικός χώρος, $\Lambda, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n : X \to \mathbb{F}$ γραμμικές

με $\bigcap_{i=1}^{n} \ker \Lambda_i \subseteq \ker \Lambda$.

Δείξτε ότι Λ = γραμμικός συνδυασμός των $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$

Απόδειξη:

Ορίζουμε $\pi : X \longrightarrow \mathbb{F}^n$, $\pi(x) = (\Lambda_1(x), \ldots, \Lambda_n(x))$

Η π είναι γραμμική. Ορίζω

$$f : \pi(X) \longrightarrow \mathbb{F}, \ f(\pi(x)) = \Lambda(x)$$

Η f είναι καλά ορισμένη διότι:

$\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow \pi(x-y) = 0 \Rightarrow \Lambda_i(x-y) = 0 \ \forall i \Rightarrow x - y \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker \Lambda_i \Rightarrow$

$\Rightarrow x-y \in \operatorname{Ker}\Lambda \Rightarrow \Lambda(x-y)=0 \Rightarrow \Lambda(x)=\Lambda(y)$

Η f έχει γραμμική επέκταση $\tilde{f}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$

Άρα υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$:

$$\tilde{f}((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = a_1\lambda_1 + \dots + a_n\lambda_n$$

· Επομένως,

$$\Lambda(x) = f(n(x)) = \tilde{f}((\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x))) = a_1\Lambda_1(x) + \dots + a_n\Lambda_n(x) \quad \forall x \in X$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: X = χώρος με νόρμα

(i) $(X, \|\cdot\|)^* = (X, w)^*$

(ii) $(X^*, w^*) = X$

Απόδειξη:

(i) Θέλω να δ.ο.

$$\{\Lambda,\ \Lambda: X \to \mathbb{F},\ \|\cdot\|\text{-συνεχής}\} = \{\Lambda,\ \Lambda: X \to \mathbb{F},\ w\text{-συνεχής}\}$$

· Έστω $\Lambda: X \to \mathbb{F}$ w-συνεχής συναρτησοειδές

Αν $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow \Lambda(x_n) \to 0$

Άρα $\Lambda = \|\cdot\|$-συνεχής

· Έστω $\Lambda: X \to \mathbb{F}$, $\|\cdot\|$-συνεχής συναρτησοειδής

Αν $x_j \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow x^*(x_j) \to 0 \ \forall x^* \in X^*$ $\Big\} \Rightarrow$

Όμως $\Lambda \in X^*$

$\Rightarrow \Lambda(x_j) \to 0$

Άρα $\Lambda = w$-συνεχής.

(α) Έστω $J: X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση

Έχω $(X^*, w^*)^* = \{\Lambda : X^* \to \mathbb{F},\ \Lambda = w^*\text{-συνεχής}\}$

Αρκεί να δ.ο $J(X) = (X^*, w^*)^*$

A] $J(X) \subseteq (X^*, w^*)^*$

- Αρκεί να δ.ο αν $x \in X$, $J(x): X^* \to \mathbb{F}$ είναι w^*-συνεχής
- Έστω $(x_j^*)^* \subseteq X^*$, $x_j^* \xrightarrow{w^*} 0 \Rightarrow x_j^*(x) \to 0\ \forall x \in X \Rightarrow$

$\Rightarrow J(x)(x_j^*) \to 0 \Rightarrow J(x) = w^*$-συνεχής

B] $(X^*, w^*)^* \subseteq J(X)$

- Έστω $\Lambda : X^* \to \mathbb{F}$, w^*-συνεχής. Θα δ.ο $\exists x \in X$, $\Lambda = J(x)$
- Αφού $\Lambda = w^*$-συνεχής το σύνολο

$$\{x^* \in X^* : |\Lambda(x^*)| < 1\} = w^*\text{-ανοικτό}$$

- Η βάση του 0 στην w^*-τοπολογία είναι συνήθως μορφής

$$\{B_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} : x_i \in X,\ \varepsilon > 0,\ 1 \le i \le n\}$$

όπου $B_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon\ \ \forall i = 1,2,\dots,n\}$

- Άρα $\exists x_1,\dots,x_n \in X$, $\varepsilon > 0$: $B_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} \subseteq \{x^* \in X^* : |\Lambda(x^*)| < 1\}$
- Παρατηρώ ότι $\bigcap_{i=1}^{n} Ker(J(x_i)) \subseteq \{x^* \in X^* : |\Lambda(x^*)| < 1\}$

[Αν $J(x_i)(x^*) = 0\ \forall i \Rightarrow x^*(x_i) = 0\ \forall i \Rightarrow x^* \in B_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} \Rightarrow \Lambda(x^*) < 1$]

- Έστω $x_0^* \in \bigcap_{i=1}^{n} Ker(J(x_i)) \Rightarrow m x_0^* \in \bigcap_{i=1}^{n} Ker(J(x_i))\ \forall m \Rightarrow$

$\Rightarrow |\Lambda(m x_0^*)| < 1\ \ \forall m \Rightarrow |\Lambda(x_0^*)| < \frac{1}{m}\ \forall m$

- Άρα $\Lambda(x_0^*) = 0$
- Επομένως $\bigcap_{i=1}^{n} Ker(J(x_i)) \subseteq Ker\Lambda \Rightarrow$

$\overset{\text{λήμμα}}{\Longrightarrow} \Lambda = a_1 J(x_1) + \dots + a_n J(x_n) = \Lambda(x)$

όπου $x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ □