<u>ΘΕΩΡΗΜΑ:</u> Έστω X τ.κ.κ διανυσματικός χώρος. Τότε

X = μετρικοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ Η τοπολογία του καθορίζεται από μία αριθμήσιμη οικογένεια ημινορμών

<u>Απόδειξη:</u>

$\boxed{\Leftarrow}$

Έστω ότι η τοπολογία του X, τ_P, καθορίζεται από την οικογένεια των ημινορμών

$P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ που διαχωρίζουν τον X.

Ορίζω $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$

Θα δ.ο d = μετρική

$\to$ $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow p_n(x-y) = 0 \ \forall n \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\to$ $p_n(x-y) = p_n((-1)(y-x)) = |-1| p_n(y-x) = p_n(y-x) \ \forall n$

Άρα $d(x,y) = d(y,x)$

$\to$ Για θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει

$$\alpha \le \beta + \gamma \Rightarrow \frac{\alpha}{1+\alpha} \le \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

Άρα αφού

$p_n(x-y) \le p_n(x-z) + p_n(z-y) \ \forall n$ έχω

$$\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \le \frac{p_n(x-z)}{1+p_n(x-z)} + \frac{p_n(z-y)}{1+p_n(z-y)} \ \forall n \Rightarrow$$

$\Rightarrow d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

Άρα d = μετρική. Έστω τ_d η τοπολογία της μετρικής

Πρέπει να δ.ο. $\tau_d = \tau_p$

• Παρατηρώ ότι $d(x+z, y+z) = d(x,y)\ \forall x,y$

Άρα αν $\mathbb{B}_d$ βάση περιοχών του 0 $\Rightarrow$ $x+\mathbb{B}_d$ = βάση περιοχών του x.

Έστω $\mathbb{B}_d = \{ B_d(0,\epsilon) : \epsilon > 0 \}$ = βάση περιοχών 0 της τ_d

• Έστω $\mathbb{B}_p = \{ \bigcap_{k=1}^{m} [p_k < \delta] : m \in \mathbb{N}, \delta > 0 \} =$
 = βάση περιοχών του 0 της τ_p

• Για να δ.ο. $\tau_p = \tau_d$ αρκεί να δ.ο.

<u>1ον</u> | $\forall\, U_d \in \mathbb{B}_d,\ \exists\, U_p \in \mathbb{B}_p : U_p \subseteq U_d$

<u>2ον</u> | $\forall\, U_p \in \mathbb{B}_p,\ \exists\, U_d \in \mathbb{B}_d : U_d \subseteq U_p$

Ισοδύναμα:

<u>1ον</u> | $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, m \in \mathbb{N}, \delta > 0 : \bigcap_{k=1}^{m} [p_k < \delta] \subseteq B_d(0,\epsilon)$

<u>2ον</u> | $\forall\, \delta > 0,\ m \in \mathbb{N},\ \exists\, \epsilon > 0 : B_d(0,\epsilon) \subseteq \bigcap_{k=1}^{m} [p_k < \delta]$

<u>Απόδειξη του 1</u>

• Έστω $\epsilon > 0$, επιλέγω n_0: $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \epsilon$

Έστω $\delta = \frac{\epsilon}{2n_0}$

• Αν $x \in \bigcap_{k=1}^{n_0} [p_k < \delta] \Rightarrow p_k(x) < \frac{\epsilon}{2n_0}\ \forall k = 1,2,\dots,n_0$

Άρα:

$$d(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} \leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x)}{1+p_k(x)} + \sum_{k>n_0} \frac{1}{2^k} \leq$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{2^k} \right)}_{\leq 1} \underbrace{\frac{\frac{\epsilon}{2n_0}}{1+\frac{\epsilon}{2n_0}}}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

Άρα $x \in B_d(0,\epsilon)$

- Επομένως $\bigcap_{k=1}^{n_0} [p_k < \delta] \subseteq B_d(0,\epsilon)$

Άρα το $1^{ον}$ ισχύει.

<u>Απόδειξη του 2</u>

Έστω $\delta > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ορίζω $\epsilon_n = \dfrac{\delta}{2^n(1+\delta)}$

Έστω $x \in B_d(0,\epsilon_n) \Rightarrow d(x,0) < \epsilon_n \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(x)}{2^k(1+p_k(x))} < \epsilon_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{p_n(x)}{2^n(1+p_n(x))} < \epsilon_n = \frac{\delta}{2^n(1+\delta)} \Rightarrow p_n(x) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [p_n < \delta]$$

- Δείξαμε ότι $B_d(0,\epsilon_n) \subseteq [p_n < \delta] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow B_d\left(0, \frac{\delta}{2^n(1+\delta)}\right) \subseteq [p_n < \delta] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

- Έστω ότι έχω το $\mathcal{Z}_p$ - βασικό σύνολο

$\bigcap_{n=1}^{m} [p_n < \delta]$. Επιλέγω

$$\epsilon = \min\left\{ \frac{\delta}{2^n(1+\delta)} : n = 1,2,\dots,m \right\}$$

Τότε $\dfrac{\delta}{2^n(1+\delta)} \geq \epsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_d(g,\epsilon) \subseteq B_d\left(g, \frac{\delta}{2^n(1+\delta)}\right) \quad \forall n = 1,2,\dots,m$$

Από (1) $\Rightarrow B_d(g,\epsilon) \subseteq [P_n < \delta] \quad \forall n = 1,2,\dots,m \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_d(g,\epsilon) \subseteq \bigcap_{n=1}^{m} [P_n < \delta]$$

Άρα το $\underline{2^{ο}}$ ισχύει.

$\boxed{\Rightarrow}$

- Έστω X = τοπ. χώρος, μετρικοποιήσιμος, τότε αν P η οικογένεια των ημινορμών που επάγει την τοπολογία στον X και d η μετρική στον X τότε $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_d$
- Έστω $n \in \mathbb{N} \Rightarrow B_d(g, \frac{1}{n})$ = d-ανοικτό $\Rightarrow B_d(g, \frac{1}{n}) \in \mathcal{T}_d$

Άρα υπάρχουν $P_1^n, \dots, P_{k_n}^n \in P$ και $\epsilon_n > 0$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{k_n} [P_i^n < \epsilon_n] \subseteq B_d(g, \tfrac{1}{n}) \quad (2)$$

- Θεωρώ $Q = \{ P_i^n : i = 1,2,\dots,k_n,\ n \in \mathbb{N} \}$

Q = αριθμήσιμο σύνολο

Από την (2) $\Rightarrow \mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_Q$ (3)

- Κάθε P_i^n είναι $\mathcal{T}_P$-συνεχής

$\mathcal{T}_Q$ = η ασθενέστερη τοπολογία που κάνει τις P_i^n

συνεχής. Άρα $\mathcal{T}_Q \subseteq \mathcal{T}_p$ (4)

- Επειδή $\mathcal{T}_j = \mathcal{T}_p$ από (3), (4) $\Rightarrow \mathcal{T}_p = \mathcal{T}_Q$

Άρα η τοπολογία στον X καθορίζεται από την οικογένεια Q που είναι αριθμήσιμη. ∎

ΟΡΙΣΜΟΣ: X = τδχ το $A \subseteq X$ λέγεται φραγμένο αν $\forall U$ = περιοχή του 0 υπάρχει $\delta > 0$: $\delta A \subseteq U$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω X τ.π.κ. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Η τοπολογία του επάγεται από νόρμα

(ii) Ο X περιέχει ένα μη κενό, ανοικτό και φραγμένο σύνολο

Απόδειξη:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

- Έστω X = χώρος με νόρμα, $A = B(0,1)$

Τότε A = ανοικτό, θα δ.ο είναι φραγμένο

- Αν V = περιοχή του 0, $\exists\, \delta > 0$: $B(0,\delta) \subseteq V$

Τότε $\delta A = B(0,\delta) \Rightarrow \delta A \subseteq V$

Άρα A = φραγμένο

(ii) $\Rightarrow$ (i)

- Έστω $U \subseteq X$ μη κενό, ανοικτό και φραγμένο σύνολο

Μπορούμε κάνοντας μία μετάθεση να έχουμε $0 \in U$

- Αφού X = τπκ, υπάρχει V = ανοικτό + κυρτό + ισορροπημένο ώστε $0 \in V \subseteq U$

- Έστω P_V το συναρτησοειδές του Minkowski. Θα

δ.ο P_V = νόρμα

Αρκεί να δ.ο $P_V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Έστω $p_V(x)=0$ και $x\neq 0$. Αφού ο X = Hausdorff

υπάρχουν περιοχές W_0 του 0 και W_x του x ώστε

$$W_0\cap W_x=\phi$$

- Αφού U = φραγμένο $\exists\, \epsilon>0$: $\epsilon U\subseteq W_0 \Rightarrow \epsilon V\subseteq W_0$

Έχω $\epsilon V=\epsilon[p_V<1]=[p_V<\epsilon]$

Άρα αφού $x\notin W_0 \Rightarrow x\notin \epsilon V \Rightarrow p_V(x)\geq \epsilon$ άτοπο

- Επομένως p_V = νόρμα
- Θα δ.ο η νόρμα αυτή επάγει την τοπολογία του X, έστω $\mathcal{T}$

Έχω $V\in\mathcal{T} \Rightarrow [p_V<1]\in\mathcal{T} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η τοπολογία της νόρμας περιέχεται στην $\mathcal{T}$ (1)

- Έστω $\epsilon>0$ και p μία από τις ημινόρμες που ορίζουν την $\mathcal{T}$.

Το $[p<\epsilon]$ = περιοχή του 0 και U = φραγμένο,

άρα $\exists\, \delta>0$: $\left.\begin{array}{c}\delta U\subseteq[p<\epsilon]\\ V\subseteq U\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \delta V\subseteq[p<\epsilon]$ (*)

- Το δV είναι ανοικτό στην τοπολογία της νόρμας

Άρα από (*) η $\mathcal{T}$ περιέχεται στην τοπολογία

της νόρμας. (2)

- Από (1), (2) $\Rightarrow$ οι τοπολογίες είναι ίσες. $\square$

Ο δυϊκός ενός τ.δ.χ — Γεωμετρική μορφή Hahn Banach

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Έστω $X =$ τδχ, ο δυϊκός του X είναι
$$X^{*} = \{ \Lambda : X \to \mathbb{F},\ \Lambda = \text{γραμμική} + \text{συνεχής} \}$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω $X =$ τδχ και $\Lambda : X \to \mathbb{F}$ μη μηδενική γραμμική απεικόνιση. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

(i) $\Lambda =$ συνεχής

(ii) $\operatorname{Ker}\Lambda =$ κλειστό

(iii) $\operatorname{Ker}\Lambda$ όχι πυκνό

(iv) $\Lambda =$ φραγμένο σε περιοχή του 0

<u>Απόδειξη</u>:

<u>(i) ⇒ (ii)</u>

$\Lambda =$ συνεχής
$\operatorname{Ker}\Lambda = \Lambda^{-1}(\{0\})$, $\{0\} =$ κλειστό $\Rightarrow \operatorname{Ker}\Lambda =$ κλειστό.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>

Αν $\operatorname{Ker}\Lambda =$ κλειστό και $\operatorname{Ker}\Lambda =$ πυκνό τότε
$\operatorname{Ker}\Lambda = X \Rightarrow \Lambda = 0$. Άτοπο

<u>(iii) ⇒ (iv)</u>

Αφού $\operatorname{Ker}\Lambda$ όχι πυκνό, $\exists\, x_0 \in X$, $U =$ ισορροπημένη περιοχή του 0

ώστε $(x_0 + U) \cap \operatorname{Ker}\Lambda = \emptyset$

Το $\Lambda(U) =$ ισορροπημένο υποσύνολο του $\mathbb{F}$.

Άρα $\Lambda(U) = (-\alpha, \alpha)$, $\alpha \in [0, +\infty]$

Αν $\Lambda(U) =$ φραγμένο τελειώσαμε

Αν $\Lambda(U) = \mathbb{F}$, τότε υπάρχει $x \in U$: $\Lambda(x) = -\Lambda(x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Lambda(x+x_0)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+x_0 \in \mathrm{Ker}\Lambda \\ x_0+x \in x_0+U \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x_0+U)\cap \mathrm{Ker}\Lambda \neq \emptyset$ Άτοπο

- Άρα Λ = φραγμένο σε περιοχή του 0.

$(iv) \Rightarrow (i)$

- Αρκεί να δ.ο. Λ = συνεχής στο 0
- Έστω $\varepsilon>0$ αρκεί να δ.ο. $\exists\, V\in \mathcal{U}_0 : \Lambda(V)\subseteq B(0,\varepsilon)$
- Από υπόθεση $\exists\, U$ = περιοχή του 0 και $\delta>0$:

$$\Lambda(U)\subseteq B(0,\delta) \Rightarrow \Lambda\left(\frac{\varepsilon}{\delta}U\right)\subseteq B(0,\varepsilon)$$

- Θέτω $V=\frac{\varepsilon}{\delta}U$ $\square$

Παράδειγμα: Έστω $0<p<1$. Ορίζω

- $X=\left\{ f:[0,1]\to \mathbb{F},\ \text{Lebesgue μετρήσιμη},\ \int_0^1 |f(t)|^p\,dt<+\infty \right\}$

Έστω $\rho(f)=\int_0^1 |f(t)|^p\,dt$, και ορίζω μετρική στον X,

$$d(f,g)=\rho(f-g).$$

Ο X = τ.δ.χ. Θα δ.ο. $X^*=\{0\}$

- Αν $\Lambda\in X^*$, $\Lambda\neq 0$ τότε το σύνολο $[\Lambda<1]$ θα ήταν θα ήταν ανοικτό + κυρτό διαφορετικό από το X.

Άρα αρκεί να δ.ο. ο X δεν έχει ανοικτά + κυρτά υποσύνολα που να διαφέρουν από τον X.

- Έστω G = ανοικτό + κυρτό, $G\neq\emptyset$, $0\in G$

Αρκεί να δ.ο. $G=X$

52

- Έστω $f \in X$,
- Επιλέγω $n \in \mathbb{N}$: $n^{p-1} \rho(f) < r$

από την συνέχεια του ολοκληρώματος υπάρχουν

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, \text{ με } \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t)|^p dt = \frac{1}{n} \rho(f)$$

- Ορίζω $g_i = n \cdot f \cdot \chi_{[t_{i-1}, t_i]}$, τότε

$$\rho(g_i) = n^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f|^p = \frac{\rho(f)}{n^{1-p}} < r$$

Άρα $g_i \in B(0, r)$, $1 \le i \le n$ $\Rightarrow g_i \in G$, $1 \le i \le n$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Έτσι } f = \frac{1}{n} g_1 + \dots + \frac{1}{n} g_n \\ G = \text{κυρτό} \end{array}\right\} \Rightarrow f \in G. \text{ Άρα } X = G$$

□

<u>Παρατήρηση:</u> Θα δ.ο αν $X = \text{τ.ν.κ} \Rightarrow X^* \neq \{0\}$

<u>Θεώρημα:</u> (Γεωμετρική μορφή Θεωρήμ. Hahn-Banach)

Έστω $X = \text{τ.ν.κ}$ και $A, B \subseteq X$ μη κενά, κυρτά και ξένα.

(i) Αν το A = ανοικτό, υπάρχει $\Lambda \in X^*$, $\gamma_0 \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Re} \Lambda(\alpha) < \gamma_0 \le \operatorname{Re} \Lambda(b) \quad \forall \alpha \in A, b \in B$$

(ii) Αν A = συμπαγές και B = κλειστό, $\exists \Lambda \in X^*$; $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$,

ώστε $\operatorname{Re} \Lambda(\alpha) < \gamma_1 < \gamma_2 < \operatorname{Re} \Lambda(b) \quad \forall \alpha \in A, b \in B$

<u>Απόδειξη:</u>

<u>α.) περίπτωση X επί $\mathbb{R}$</u>

(i) Σταθεροποιούμε $\alpha_0 \in A$, $b_0 \in B$; $x_0 = b_0 - \alpha_0$

- Ορίζουμε $U = x_0 + A - B \Rightarrow \begin{cases} 0 \in U \\ U = \text{ανοικτό} \\ U = \text{κυρτό} \end{cases}$

Επομένως το συναρτησοειδές του Minkowski, ρ_U είναι υπογραμμικό και $U = [\rho_U < 1]$

- Παρατηρώ $x_0 \notin U$ διότι αν $x_0 \in U$ έχω

$$x_0 = x_0 + \alpha - b,\ \alpha \in A,\ b \in B \Rightarrow \alpha = b \in A \cap B \Rightarrow A \cap B = \phi$$

Άρα $\rho_U(x_0) \geq 1$

- Ορίζουμε $f : [x_0] \to \mathbb{R}$, $f(tx_0) = t$

$\to$ Αν $t \geq 0 \Rightarrow f(tx_0) = t \leq t\rho_U(x_0) = \rho_U(tx_0)$

$\to$ Αν $t < 0 \Rightarrow f(tx_0) = t < 0 \leq \rho_U(tx_0)$

Άρα τελικά $f \leq \rho_U|_{[x_0]}$

- Από το Θεώρημα Hahn-Banach, $\exists \Lambda : X \to \mathbb{R}$, γραμμική επέκταση της f ώστε $\Lambda \leq \rho_U$

- Έστω $x \in U \cap (-U)$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} x \in U \Rightarrow \Lambda(x) \leq \rho_U(x) < 1 \\ -x \in U \Rightarrow \Lambda(-x) \leq \rho_U(-x) < 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |\Lambda(x)| < 1$$

Δηλ. $\forall x \in U \cap (-U) \Rightarrow |\Lambda(x)| < 1$

- Συνεπώς το Λ = φραγμένο στην περιοχή του 0, $U \cap -U$ και άρα είναι συνεχές, $\Lambda \in X^*$.

- Έστω $\alpha \in A$, $b \in B$, τότε

$$\Lambda(\alpha) - \Lambda(b) + 1 = \Lambda(\alpha) - \Lambda(b) + \Lambda(x_0) = \Lambda(\alpha - b + x_0) \leq \rho_U(\alpha - b + x_0) < 1$$

Άρα $\Lambda(\alpha) < \Lambda(b)$, $\forall \alpha \in A$, $b \in B$

Αν $\Lambda(A) = \{0\} \Rightarrow \Lambda = 0$ άτοπο

Άρα $\left.\begin{matrix} \Lambda(A) \neq \{0\} \\ A = \text{ανοικτό} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \Lambda(A) = \text{ανοικτό} \\ \Lambda(A) = \text{κυρτό} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Lambda(A) = I_1 =$ ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$

Το $\Lambda(B) = I_2 =$ διάστημα του $\mathbb{R}$.

Αν $\gamma_0 =$ αριστερό άκρο του I_2 τότε $\Lambda(\alpha) < \gamma_0 \leq \Lambda(b)$

$\forall \alpha \in A,\ b \in B$

(α) Έστω $A =$ συμπαγές + κυρτό, $B =$ κλειστό + κυρτό, $A \cap B = \emptyset$

Ισχυρισμός: $\exists\ V =$ ανοικτή + κυρτή περιοχή του 0:

$$(A + V) \cap B = \emptyset$$

Απόδειξη:

- $\forall x \in A,\ x \notin B \Rightarrow \exists\ U_x =$ κυρτή περιοχή του 0:

$$(x + U_x) \cap B = \emptyset$$

Από την συνέχεια της πρόσθεσης, $\exists\ V_x =$ κυρτή περιοχή του 0 ώστε $V_x + V_x \subseteq U_x$

- Το $\{x + V_x : x \in A\} =$ ανοικτό κάλυμμα του A

Άρα $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + V_{x_k})$, $x_1, \dots, x_n \in A$

Θέτω $V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}$ τότε $(A + V) \cap B = \emptyset$

(Διότι αν $x \in A,\ y \in V$, $\exists\ i$: $x \in x_i + V_{x_i}$

Άρα $\left.\begin{matrix} x + y \in x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subseteq x_i + U_{x_i} \\ (x_i + U_{x_i}) \cap B = \emptyset \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + y \notin B$

Με άλλα λόγια $(A+V)\cap B=\emptyset$

Αφού $A+V$ = ανοικτό + κυρτό, B = κυρτό

και $(A+V)\cap B=\emptyset$ από το ©, $\exists\ \Lambda\in X^*, \lambda\in\mathbb{R}$:

$$\Lambda(\alpha+x) < \lambda \le \Lambda(b)\quad \forall\, \alpha\in A,\ x\in V,\ b\in B$$

Αφού $A\subseteq A+V \Rightarrow \Lambda(\alpha)<\lambda\le\Lambda(b)\ \forall\,\alpha\in A,\ b\in B$

Αφού $\Lambda(A)$ = συμπαγές αν $h=\max(\Lambda(A))$ έχω

$$\Lambda(\alpha)\le h<\lambda\le\Lambda(b)\quad \forall\,\alpha\in A,\ b\in B$$

Παίρνω λ_1,λ_2: $h<\lambda_1<\lambda_2<\lambda$ και έχω

$$\Lambda(\alpha)<\lambda_1<\lambda_2<\Lambda(b)\quad \forall\,\alpha\in A,\ b\in B$$

β) περίπτωση X επί $\mathbb{C}$

- Θεωρούμε το X ως δ.χ. επί $\mathbb{R}$

Από την α) περίπτωση, $\exists\ \Lambda: X\to\mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$\Lambda(\alpha)<\lambda_0\le\Lambda(b)\quad \forall\,\alpha\in A,\ b\in B$$

Ορίζω $\tilde\Lambda: X\to\mathbb{C}$, $\tilde\Lambda(x)=\Lambda(x)-i\Lambda(ix)$

$\to$ $\tilde\Lambda$ = $\mathbb{C}$-γραμμική

$\to$ $\mathrm{Re}\,\tilde\Lambda(\alpha)=\Lambda(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,\tilde\Lambda(b)=\Lambda(b)$

Άρα $\mathrm{Re}\,\tilde\Lambda(\alpha)<\lambda_0\le\mathrm{Re}\,\tilde\Lambda(b)\ \forall\,\alpha\in A,\ b\in B$

- Όμοια με πριν βρίσκω λ_1,λ_2:

$$\mathrm{Re}\,\tilde\Lambda(\alpha)<\lambda_1<\lambda_2<\mathrm{Re}\,\tilde\Lambda(b)\quad \forall\,\alpha\in A,\ b\in B \quad \square$$