Συνέπειες του Θεωρήματος Baire στους χώρους Banach

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ Baire:</u> Έστω X πλήρης μετρικός χώρος

(i) Αν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, υπάρχει n_0: $\overset{\circ}{\overline{A_{n_0}}} \neq \emptyset$

(ii) Αν $G_n \subseteq X$ ανοικτά + πυκνά στον X, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό στον X.

• Θα δ.ο. αν $X, Y =$ Banach, $T : X \to Y$ φ.γ.τ. επί, τότε η $T =$ ανοικτή. Δηλ. $A \subseteq X$ ανοικτό τότε $T(A) \subseteq Y$ ανοικτό.

<u>ΛΗΜΜΑ 1</u> Έστω X, Y Banach, $T : X \to Y$ φ.γ.τ. επί. Τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $B_Y(0,\delta) \subseteq \overline{T(B_X(0,\varepsilon))}$

<u>Απόδ.</u>

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0, n\tfrac{\varepsilon}{2}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n B_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} n T(B_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2})) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} n T(B_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2}))$$

Αφού $Y =$ πλήρης, από το Θεώρημα Baire, $\exists n$:

$$\overset{\circ}{\overline{n T(B_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2}))}} \neq \emptyset \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{T(B_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2}))}} \neq \emptyset$$

• Άρα $\exists\, y \in Y$, $\delta > 0$, ώστε

$$B_Y(y,\delta) \subseteq T(B_X(0,\tfrac{\varepsilon}{2}))$$ (A)

• $B_X(0,\varepsilon) \supseteq B_X(0,\frac{\varepsilon}{2}) - B_X(0,\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow T(B_X(0,\varepsilon)) \supseteq T(B_X(0,\frac{\varepsilon}{2})) - T(B_X(0,\frac{\varepsilon}{2}))$

Άρα

$$\overline{T(B_X(0,\varepsilon))} \supseteq \overline{T(B_X(0,\tfrac{\varepsilon}{2})) - T(B_X(0,\tfrac{\varepsilon}{2}))} \supseteq \overline{T(B_X(0,\tfrac{\varepsilon}{2}))} - \overline{T(B_X(0,\tfrac{\varepsilon}{2}))}$$

• Άρα από την (A) έχω

$$\overline{T(B_X(0,\varepsilon))} \supseteq B_Y(y,\delta) - B_Y(y,\delta) \supseteq y - B_Y(y,\delta) = B_Y(0,\delta)$$ □

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ:</u>

• Αν $x \in X$, το $A \subseteq X$ περιοχή του x αν $x \in \mathring{A}$

• Αν $A =$ περιοχή του $0 \Rightarrow x + A =$ περιοχή του x

• Αν $B \subseteq X$ τότε $x \in \overline{B} \Leftrightarrow (x+A) \cap B \neq \emptyset$ $\forall A =$ περιοχή του 0

<u>ΛΗΜΜΑ 2</u> Έστω X, Y Banach, $T: X \to Y$ φ.γ.τ. επί

Τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{T(B_X(0,\frac{\varepsilon}{2}))} \subseteq T(B_X(0,\varepsilon))$

<u>Αποδ.</u>

• Έστω $V_n = B_X(0,\frac{\varepsilon}{2^n})$, $n = 0,1,2,\ldots$

• Θέλω να δ.ο. $\overline{T(V_1)} \subseteq T(V_0)$

• Έστω $y \in \overline{T(V_1)}$. Θα κατασκευάσω επαγωγικά $(y_n) \subseteq Y$

με $y_1 = y$, $y_n \in \overline{T(V_n)}$, $y_n - y_{n+1} \in T(V_n)$ (A)

Απο το Λημμα 1, $\overline{T(V_2)}$ = περιοχη του 0 ⇒ $y_1 - \overline{T(V_2)}$ περιοχη του y

Αρα αφού $y_1 \in \overline{T(V_1)}$ εχω

$$(y_1 - \overline{T(V_2)}) \cap T(V_1) \neq \emptyset$$

Αρα $\exists\, y_2 \in \overline{T(V_2)} : y_1 - y_2 \in T(V_1)$

Συνεχίζω επαγωγικά και ~~εχω~~ την (*)

- Επειδη ο $y_n \in \overline{T(V_n)}$ εχω

$$\|y_n\| = \|y_n - 0\| \leq \operatorname{diam}(\overline{T(V_n)}) = \operatorname{diam} T(V_n)$$

Εχω

$$\operatorname{diam} T(V_n) = \sup\{\|T(x) - T(y)\| : x, y \in V_n\} \leq$$
$$\leq \|T\| \sup\{\|x - y\| : x, y \in V_n\} = \|T\| \operatorname{diam}(V_n) \leq \|T\| \frac{r}{2^{n-1}} \to 0$$

Αρα $\|y_n\| \to 0$

- Για καθε $n \in \mathbb{N}$, $y_n - y_{n+1} \in T(V_n)$ ⇒

⇒ $\exists\, x_n \in V_n : T(x_n) = y_n - y_{n+1}$

Ομως $\|x_n\| < \frac{r}{2^n}$ ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$

- Επειδη X = Banach, $\exists\, x \in X$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Εχω $\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{2^n} = r$

Αρα $x \in V_0$

- Εχω $x = \lim_m \sum_{n=1}^{m} x_n \Rightarrow T(x) = \lim_m \sum_{n=1}^{m} T(x_n) =$

$$= \lim_m \sum_{n=1}^{m} (y_n - y_{n+1}) = \lim_m (y_1 - y_m) = y_1$$

Άρα, $y_1 \in T(V_0) \Rightarrow y \in T(V_0)$

· Επομένως $\overline{T(V_1)} \subseteq T(V_0)$ □

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ανοικτής απεικόνισης)

X, Y = Banach, $T : X \to Y$ φ.γ.τ. επί

Τότε ο T = ανοικτή απεικόνιση

Απόδ.

· Έστω $G \subseteq X$ ανοικτό, θα δ.ο. $T(G) \subseteq Y$ ανοικτό

· Έστω $y \in T(G) \Rightarrow \exists\, x \in G : T(x) = y$

Αφού G = ανοικτό, $\exists\, \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq G$ (A)

· Από τα λήμματα (1), (2) $\exists\, \delta > 0$:

$$B_Y(0, \delta) \subseteq \overline{T(B_X(0, \tfrac{\varepsilon}{2}))} \subseteq T(B_X(0, \varepsilon)) \quad (AA)$$

$$B_Y(y, \delta) = y + B_Y(0, \delta) = T(x) + B_Y(0, \delta) \overset{(AA)}{\subseteq} T(x) + T(B_X(0, \varepsilon)) =$$

$$= T(x + B_X(0, \varepsilon)) = T(B_X(x, \varepsilon)) \overset{(A)}{\subseteq} T(G)$$

· Για το τυχόν $y \in T(G)$ βρήκα μπάλα

$B_Y(y, \delta) \subseteq T(G)$

· Άρα $T(G)$ = ανοικτό