

Εξέταση Μαθηματικής Ανάλυσης
06-07-2023
Διάρκεια Εξέτασης 2 ώρες και 50 λεπτά

ΘΕΜΑ 1ο:

(α) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $f(X) = [0, 1] \cup [2, 3]$. Να εξεταστεί με βάση τον ορισμό, το X ως προς την συνεκτικότητα.

(β-ι) Έστω A άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} . Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνεκτικότητας, δείξτε ότι το A είναι μη συνεκτικό.

(β-ii) Έστω $B = \{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ με $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$. Να εξεταστεί το B ως προς την συνεκτικότητα.

ΘΕΜΑ 2ο:

(α) Έστω d_δ η διακριτή μετρική στο σύνολο X . Δείξτε ότι ο χώρος (X, d_δ) είναι συμπαγής αν και μόνο αν το X είναι πεπερασμένο.

(β) Έστω $(X, d), (Y, \rho)$ μετρικοί χώροι, (X, d) συμπαγής και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $(x_n) \subseteq X$ είναι βασική ακολουθία τότε και η $(f(x_n))$ είναι επίσης βασική. Ισχύει το συμπέρασμα αν ο X δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος;

ΘΕΜΑ 3ο: (α) Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n}, x \in (-\infty, 0).$$

(β) Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}.$$

ΘΕΜΑ 4ο:

(α) Να εξεταστεί ως προς την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \notin (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \end{cases}$$

(β) Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά με κέντρο το 5 η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + x$.

ΘΕΜΑ 5ο:

(α) Έστω H ο χώρος $C([0, 1])$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ και νόρμα $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$. Δείξτε ότι ο H είναι διαχωρίσιμος.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$. Να αναπτυχθεί η f σε σειρά Fourier.

Καλή επιτυχία